

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LEBESGUE GENERATING MEASURES  
**Autor:** Freilich, Gerald

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45372>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on the Borel sets of  $R^n$ . Since for any set  $A \subset R^n$ , there exists a  $G_\delta$  set  $B \supset A$  with  $L(B) = L(A)$ , it follows that

$$L(A) \leq \Phi_{\mathcal{G},M}(A) \leq \Phi_{\mathcal{G},M}(B) = L(B) = L(A),$$

$$\Phi_{\mathcal{G},M}(A) = L(A).$$

Having proved  $\Phi_{\mathcal{G},M} = L$ , we apply Theorems 2 and 3 to conclude

$$L \leq \varphi_{\mathcal{F},M} \leq \Phi_{\mathcal{F},M} \leq \Phi_{\mathcal{G},M} = L,$$

and the proof is complete.

*Corollary 1.* [1, p. 163]. Hausdorff  $n$ -dimensional sphere outer measure in  $R^n$  agrees with  $L$  on all the subsets of  $R^n$ .

*Proof.* Recall that Hausdorff  $n$ -dimensional sphere outer measure is the outer measure  $\Phi_{\mathcal{F},L}$  where  $\mathcal{F}$  is the set of all spheres in  $R^n$ . Application of Theorem 5 is immediate.

*Corollary 2.* [5]. Hausdorff  $n$ -measure in  $R^n$  agrees with  $L$  on all subsets of  $R^n$ .

*Proof.* Recall that Hausdorff  $n$ -measure is the outer measure  $\Phi_{\mathcal{F},M}$  where  $\mathcal{F}$  is the set of all subsets of  $R^n$  and  $M(A) = (n!)^{-1} \Gamma(\frac{1}{2})^{n-1} \Gamma(\frac{n+1}{2}) (\text{diam } A)^n$ . In Theorem 5, take  $\alpha$  to be an  $n$ -sphere. The isodiametric inequality implies that  $M \geq L$  on  $\mathcal{F}$  and  $M = L$  on  $\mathcal{G}$ . Application of Theorem 5 completes the proof.

*Corollary 3.*  $L$  is invariant under rotation.

*Proof.* For a fixed rotation, merely take  $\mathcal{F}$  to be the set of rotated  $n$ -cubes and  $M = L$ .

The author wishes to acknowledge the interesting correspondence with Professor Arthur B. Brown which initiated this paper.

#### REFERENCES

- [1] HAUSDORFF, F. Dimension und auseres Mass, *Math. Ann.*, 79 (1918), pp. 157-179.
- [2] MUNROE, M. E. *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953.
- [3] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1966.
- [4] SAKS, S. *Theory of the Integral*, Warsaw, 1937.
- [5] SARD, A. The Equivalence of  $n$ -measure and Lebesgue Measure in  $E_n$ , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), pp. 758-759.

(Reçu le 21 mars 1972)

Gerald Freilich  
 Queens College  
 City University of New York  
 Flushing, New York 11367