

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	18 (1972)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNOMES SUR UN CORPS DE NOMBRES
<b>Autor:</b>	Mignotte, Maurice
<b>Kapitel:</b>	V. Deuxième choix de E
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-45369">https://doi.org/10.5169/seals-45369</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Conclusion.*

THÉORÈME 1. *Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficients entiers et qui ne s'annule pas à l'origine. Pour tout  $a \geq 2$ , il existe une constante  $C$  calculable explicitement et qui ne dépend que de  $\deg P$ ,  $|P|_2$  et  $K$ , telle que si  $P$  est réductible alors on a l'inégalité :*

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq C(\log a)^r.$$

*(Où  $i_a(P)$  désigne le nombre de points  $x$  de hauteur majorée par  $a$  et tels que  $P(x)$  soit un élément irréductible de  $A$ ).*

*Démonstration :*

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes à coefficients dans  $A$  et de produit  $P$ . D'après le lemme 1, nous avons l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq u_a(P_1) + u_a(P_2).$$

Soit  $S$  le nombre  $2^{d-1} |P|_2$ ; le lemme 4 montre que  $|P_1|_1$  et  $|P_2|_1$  sont majorés par  $S$ .

Nous pouvons maintenant appliquer les lemmes 5 et 6 aux polynômes  $P_1$  et  $P_2$ . En tenant compte de l'inégalité (1), nous obtenons les majorations

$$\begin{aligned} u_a(P_1) + u_a(P_2) &\leq w C_1 (C_0 \log a)^r ((\deg P_1)^{r+1} + (\deg P_2)^{r+1}) \\ &\leq 2w C_1 (C_0 \log a)^r (\deg P)^{r+1}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

*Remarque.* L'inégalité  $a \geq 2$  n'a été introduite que pour éviter des complications inutiles. Le théorème reste vrai pourvu que l'on suppose  $a \geq \alpha_0$  avec  $\alpha_0$  fixé,  $\alpha_0 > 1$ , mais cette fois la constante  $C$  dépend de  $\alpha_0$ .

CRITÈRE 1. *S'il existe  $a \geq 2$  tel que l'on ait l'inégalité*

$$i_a(P) + 2u_a(P) > C(\log a)^r$$

*alors le polynôme  $P$  est irréductible dans  $K[X]$ .*

## V. DEUXIÈME CHOIX DE $E$

THÉORÈME 2. *Soit  $P$  un polynôme unitaire réductible qui ne s'annule pas à l'origine et à coefficients dans  $A$ . Désignons par  $S$  le nombre  $2^{d-1} |P|_2$ , où  $d$  est le degré de  $P$ .*

*Pour tout entier  $x$ , dont tous les conjugués sont strictement supérieurs à  $S$ , l'élément  $P(x)$  est réductible dans  $A$ .*

*Démonstration :*

D'après le lemme 4 nous savons que si  $P_1$  désigne un diviseur de  $P$ , alors  $|P_1|_1$  est majoré par  $S$ . Soit alors  $\sigma_i$  un isomorphisme quelconque de  $K$  dans  $\mathbf{C}$  et soit  $x$  un entier dont tous les conjugués sont supérieurs à  $S$ . Nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |\sigma_i(P_1(x))| &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1} - (|P_1|_1 - 1) |\sigma_i(x)|^{d_1-1} \\ &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1-1} (|\sigma_i(x)| + 1 - S) > S^{d_1-1} \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $i$ , la norme de  $P_1(x)$  a un module strictement supérieur à 1; autrement dit  $P_1(x)$  n'est pas une unité. Si  $P$  est égal au produit de  $P_1$  et d'un polynôme  $P_2$ , la même démonstration montre que  $P_2(x)$  n'est pas une unité. Dans ces conditions, il est clair que l'élément  $P(x)$  est réductible dans l'anneau  $A$ .

Du théorème résultent immédiatement les deux critères suivants:

**CRITÈRE 2.** *Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficients dans  $A$  et qui ne s'annule pas en zéro et de degré  $d$ . S'il existe un élément  $x$  entier dont tous les conjugués ont un module strictement supérieur à  $2^{d-1} |P|_2$  et tel que l'élément  $P(x)$  soit irréductible dans  $A$ , alors le polynôme  $P$  est irréductible sur  $K$ .*

**CRITÈRE 2'.** *Avec les mêmes notations que ci-dessus, s'il existe un entier rationnel  $x$  de module strictement supérieur à  $2^{d-1} |P|_2$  et tel que  $P(x)$  soit irréductible dans  $A$ , alors le polynôme  $P$  est irréductible dans  $K[X]$ .*

#### RÉFÉRENCE

- [1] MIGNOTTE, M. Un critère d'irréductibilité des polynômes. *Enseignement mathématique*, tome 17 (1971), pp. 213-214.

(Reçu le 24 février 1971)

Maurice Mignotte  
Centre Scientifique  
Place du 8 mai 45  
F-93 - Saint-Denis