Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNOMES SUR UN CORPS DE NOMBRES

Autor: Mignotte, Maurice

Kapitel: I. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45369

CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNOMES SUR UN CORPS DE NOMBRES

par Maurice MIGNOTTE

I. INTRODUCTION

Désignons par K un corps de nombres et par A l'anneau des entiers de K. Nous ne considérerons que des polynômes unitaires à coefficients dans A.

Un élément x de A sera dit irréductible s'il n'est pas inversible dans A et s'il n'est pas égal au produit de deux éléments non inversibles de A. Un polynôme unitaire P à coefficients dans A sera dit irréductible s'il n'est pas constant et s'il n'est pas égal au produit de deux polynômes non constants et à coefficients dans A. Du fait que l'anneau A est intégralement clos, un polynôme unitaire à coefficients dans A est irréductible dans A si et seulement s'il est irréductible sur K. Dans toute la suite, il importera de ne pas confondre le fait qu'un polynôme P est irréductible et le fait, qu'en un point x de A, la valeur $P(x)$ est un élément irréductible de A.

Les deux critères d'irréductibilité qui font l'objet de ce travail sont de même nature: si un polynôme unitaire et à coefficients dans A prend en certains points de A suffisamment de valeurs qui sont des unités ou des éléments irréductibles de A, alors P est nécessairement irréductible.

Le point de départ consiste à remarquer que si P est le produit de deux polynômes P_1 et P_2 à coefficients dans A et si x est un point de A tel que $P(x)$ soit une unité ou un élément irréductible de A, alors l'un au moins des polynômes P_1 et P_2 prend au point x une valeur qui est une unité de A. Ceci conduit à chercher des majorations du nombre de points x, contenus dans certains domaines, où un polynôme Q peut prendre des valeurs qui sont des unités. Ces majorations font intervenir la hauteur des coefficients de Q; pour les appliquer aux polynômes P_1 et P_2 il est nécessaire de trouver une majoration des hauteurs des polynômes P_1 et P_2 en fonction de celle du polynôme P.

Nous choisirons deux domaines différents pour les points x; dans le premier cas les points considérés auront une hauteur bornée, dans le second cas chacun de leurs conjugués sera assez grand. Dans le premier cas nous utiliserons le plongement logarithmique du corps K et le fait que l'image par ce plongement du groupe des unités est un réseau; il suffira de majorer la norme des images de $Q(x)$ pour des points x de hauteur bornée. Dans le second cas, nous utiliserons simplement le fait que si x a tous ses conjugués assez grands il en est de même de $Q(x)$ et donc que $Q(x)$ ne peut pas être une unité.

II. Une remarque préliminaire

Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans A qui soit le produit de deux polynômes P_1 et P_2 à coefficients dans A. Les valeurs de ces polynômes en un point x de A donnent lieu à des remarques évidentes: Si $P(x)$ est un élément irréductible de A, l'un des deux éléments $P_1(x)$ et $P_2(x)$ au moins est une unité; si $P(x)$ est une unité, les deux éléments $P_1(x)$ et $P_2(x)$ de A sont des unités; d'où l'inégalité [1]):

Lemme 1:. *En désignant, pour chaque partie E de A, et tout polynôme Q sur A, par* $u(Q, E)$ *et* $i(R, E)$ *le nombre d'éléments de E où la valeur de Q est une unité, respectivement un élément irréductible, on a l'inégalité*

$$i(P, E) + 2u(P, E) \leqq u(P_1, E) + u(P_2, E).$$

III. Majoration des hauteurs de P_1 et P_2

Considérons provisoirement un polynôme g à coefficients complexes et qui ne s'annule pas à l'origine.

Posons

$$g = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d.$$

Pour simplifier, nous supposerons g unitaire. Si g est le produit de deux polynômes unitaires g_1 et g_2, nous cherchons à majorer les coefficients de g_1 et g_2. Pour ceci, on utilisera le fait que les coefficients de g_1 sont certaines fonctions des racines du polynôme g. Plus précisément, la somme des coefficients de g_1 est égale à la somme de 2^{d_1} (d_1 désigne le degré de g_1)

---

[1]) Pour plus de détails, voir (1).