Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT

Autor: Dress, François

Kapitel: 9. Théorème de Hilbert. L'identité fondamentale

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45368

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nous retiendrons cette identité sous la forme suivante:

LEMME. *Pour tout entier positif k il existe des entiers positifs $R = R(k)$, $S = S(k)$, α, $a_1, \ldots, a_R$, $c_1, \ldots, c_S$, et des entiers quelconques β, $b_1, \ldots, b_R$, $d_1, \ldots, d_S$, tels que l'on ait l'identité*

$$\sum_{i=1}^{R} (a_i n + b_i)^{2k} = \sum_{j=1}^{S} (c_j n + d_j)^{2k} - (\alpha n + \beta) .$$

9. THÉORÈME DE HILBERT. L'IDENTITÉ FONDAMENTALE

La méthode de Hilbert pour démontrer l'existence de $g(n)$ est fondée sur la donnée, pour tout k, d'une identité de même forme que celle que nous avons vue pour les sommes de bicarrés:

$$M(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i5}x_5)^{2k} .$$

Mais cette identité permet uniquement de démontrer l'existence de $g(2k)$ en supposant établie celle de $g(k)$. Hilbert a donc dû, pour montrer l'existence de $g(n)$ pour les valeurs impaires de n, imaginer un raisonnement par récurrence que nous trouvons personnellement assez compliqué. Après Hilbert, de nombreux mathématiciens se sont efforcés de simplifier sa démonstration mais les améliorations ont pratiquement toutes porté sur l'établissement de l'identité fondamentale.

Nous nous proposons ici de supprimer la seconde partie de la démonstration de Hilbert et de prouver, sans aucune récurrence, que $g(n)$ existe pour tout n pair (d'où il s'ensuit trivialement que $g(n)$ existe aussi pour tout n impair). Outre l'utilisation déjà annoncée des identités du problème facile de Waring, nous aurons besoin au préalable de préciser quelque peu l'identité fondamentale de Hilbert.

LEMME. *Pour tout entier positif k il existe des entiers positifs M, $N = (2k+1) \ldots (2k+5)/24$, $m_1, \ldots, m_{N-1}$, m_N, avec M et m_N strictement positifs, et des entiers $a_{11}, \ldots, a_{15}$, $a_{21}, \ldots, a_{N5}$, tels que l'on ait l'identité*

$$M(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^k = \sum_{i=1}^{N-1} m_i (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i5}x_5)^{2k} + m_N x_5^{2k} .$$

(L'innovation par rapport à l'identité de Hilbert est: m_N est strictement positif).

COROLLAIRE. *Pour tout entier positif k il existe des entiers positifs $M = M(k)$ et $Q = Q(k)$ tels que, pour tout entier l et tout entier $x \leqslant \sqrt{l}$ on ait*

$$Ml^k = x^{2k} + \sum_1^Q u_h{}^{2k}$$

$$(\textit{avec les } u_h \in \mathbf{Z})$$

Ce corollaire est la généralisation du résultat que nous avions utilisé pour disposer d'un « cube arbitraire ».

Pour la démonstration de notre identité, nous utiliserons la méthode de Schmidt, reprise par Ellison, qui s'appuie sur les propriétés des ensembles convexes (dans un espace vectoriel réel). Nous rappelons tout d'abord — sans démonstration — les définitions et résultats dont nous aurons besoin:

— étant donné un ensemble $S \subset \mathbf{R}^N$, on appelle enveloppe convexe (ou clôture convexe) de S et on note $h(S)$ le plus petit ensemble convexe qui contient S (i.e. l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent S);

— étant donné un ensemble $S \subset \mathbf{R}^N$, tout vecteur $V \in h(S)$ peut s'écrire sous la forme $V = \sum_{i=1}^N m_i s_i$, avec $s_i \in S$, $m_i \in \mathbf{R}$, $m_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^N m_i = 1$. De plus, si tous les vecteurs de S sont à coordonnées rationnelles, et si V est également à coordonnées rationnelles, les m_i peuvent être choisis rationnels;

— le barycentre d'une masse continûment répartie dans un ensemble S borné se trouve toujours à l'intérieur de $h(S)$ (cet intérieur étant « pris » dans la plus petite variété affine support de $h(S)$ — munie de la topologie ordinaire).

Nous allons maintenant donner la démonstration de l'identité de Hilbert telle qu'elle est exposée par Ellison. Il nous suffira ensuite d'un petit complément pour obtenir la précision supplémentaire: m_N est strictement positif.

L'ensemble des formes homogènes de degré $2k$ en 5 variables et à coefficients réels constitue un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $N = (2k+1) \dots (2k+5)/24$ (N est le nombre de termes de la forme générale de degré $2k$ en $x_1, \dots, x_5$). On considère alors dans cet espace $\mathbf{R}^N$ l'ensemble S de toutes les formes $(a_1x_1 + \dots + a_5x_5)^{2k}$, les a_i appartenant

à $\mathbf{Q}$, ainsi que son enveloppe convexe $h(S)$. Puis on considère les sous-ensembles T et T' constitués par les formes $(a_1x_1 + \ldots + a_5x_5)^{2k}$ vérifiant $a_1{}^2 + \ldots + a_5{}^2 \leqslant 1$, les a_i appartenant respectivement à $\mathbf{Q}$ et à $\mathbf{R}$. On a l'inclusion $h(T) \subset h(S)$, cependant que $h(T)$ et $h(T')$ ont même intérieur.

On étudie ensuite l'intégrale

$$\int_{\mathscr{S}} (a_1x_1 + \ldots + a_5x_5)^{2k}\, da_1 \ldots da_5 \;/\; \int_{\mathscr{S}} da_1 \ldots da_5$$

$$(\mathscr{S} \text{ étant l'hypersphère } a_1{}^2 + \ldots + a_5{}^2 \leqslant 1)$$

et on établit, à l'aide d'un banal changement de variables, qu'elle est égale à $c\,(x_1{}^2 + \ldots + x_5{}^2)^k$, avec

$$c = \int_{\mathscr{S}} t_1{}^{2k}\, dt_1 \ldots dt_5 \;/\; \int_{\mathscr{S}} dt_1 \ldots dt_5) > 0\,.$$

La forme $f = c\,(x_1{}^2 + \ldots + x_5{}^2)^k$ se trouve par conséquent à l'intérieur de $h(T')$, donc de $h(T)$, donc de $h(S)$, ainsi d'ailleurs que toutes les formes λf (λ réel $\in [0, 1]$). Et on peut conclure en choisissant λ tel que $\lambda c \in \mathbf{Q}$.

Mais nous pouvons faire un peu mieux : en effet la forme f est à l'intérieur de $h(S)$ tandis que la forme $g = x_5{}^2$ est dans S donc dans la variété affine support de S; ce qui permet d'en déduire qu'il existe μ_0 réel > 0 tel que, pour tout μ réel $\in [0, \mu_0]$, la forme $f - \mu g$ se trouve dans $h(S)$, ainsi d'ailleurs que toutes les formes $\lambda f - \lambda\mu g$ (λ réel $\in [0, 1]$). Nous choisissons alors λ et μ tels que λc et $\lambda\mu$ soient rationnels et, en utilisant les résultats rappelés sur les ensembles convexes et les vecteurs à coordonnées rationnelles, nous en déduisons l'identité cherchée.

10. Théorème de Hilbert. Fin de la démonstration

Théorème. *Pour tout entier positif k il existe des entiers positifs $A = A(k)$ et $T = T(k)$ tels que tout intervalle $[m - A, m]$ contienne un nombre qui soit somme de T puissances $2k$-ièmes.*

Corollaire (théorème de Hilbert). *Pour tout entier positif n, $g(n)$ est fini.*

On pourra remarquer que la recherche d'une majoration explicite de $g(2k)$ en utilisant notre démonstration dépend essentiellement des constantes M et m_i qui interviennent dans l'identité fondamentale, les autres constantes (celles que l'on trouve dans l'identité relative au problème facile de Waring comme celles qui interviendront dans la suite de la démonstration) étant aisément estimables ou majorables.