Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT

Autor: Dress, François

Kapitel: 2. Notions fondamentales en théorie additive des nombres

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45368

$$14 = 9 + 4 + 1 + 0$$
$$15 = 9 + 4 + 1 + 1$$
$$16 = 16 + 0 + 0 + 0 = 4 + 4 + 4 + 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Fermat avait ajouté, dans la lettre à Mersenne où il indiquait cette découverte, qu'il n'avait pas la place d'en donner la démonstration, mais qu'il y consacrerait un livre entier. Le livre ne fut jamais publié... On peut d'ailleurs douter que Fermat ait été en possession d'une démonstration correcte car des efforts infructueux furent déployés pendant plus d'un siècle, par Euler en particulier, pour tenter de résoudre ce problème. C'est finalement Lagrange, en 1770, qui en donna la première démonstration.

En même temps d'autres théorèmes empiriques, de nature additive également, étaient énoncés. Les deux plus célèbres sont le problème de Goldbach, formulé en 1742 dans une lettre à Euler: tout entier pair est-il somme de 2 nombres premiers ? et le problème de Waring, formulé en 1770 dans un livre (avec addition du « etc... » dans l'édition de 1782!): tout entier positif est-il somme de 9 cubes, de 19 bicarrés, etc... ?

On verra que ces questions sont, malgré la simplicité de leur énoncé, extrêmement ardues et que l'intervalle qui sépare l'énoncé empirique de sa démonstration se compte en dizaines d'années ou plus souvent en siècles (phénomène assez courant en arithmétique!).

2. Notions fondamentales en théorie additive des nombres

En donnant le premier résultat partiel intéressant dans le problème de Goldbach, Schnirelman esquissa, en 1930, un cadre général pour tous les problèmes additifs relatifs à des suites d'entiers.

Etant donné 2 suites croissantes d'entiers strictement positifs $A = \{a_1 < a_2 < ...\}$ et $B = \{b_1 < b_2 ...\}$, on appelle somme de A et B et on note $A + B$ la suite croissante obtenue en réordonnant l'ensemble $A \cup B \cup \{a_i + b_j \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ (on convient parfois que $a_0 = 0 \in A$, $b_0 = 0 \in B$, auquel cas on considère simplement l'ensemble $\{a_i + b_j\}$).

On peut en particulier effectuer les sommes $A + A = 2A$, $A + A + A = 3A, ..., A + ... + A = hA, ...$ On dit alors que la suite A est une base (d'ordre $\leqslant h$) des entiers s'il existe h tel que $hA = \mathbf{N}$ (A est exactement d'ordre h si $(h-1)\,A \subsetneq \mathbf{N}$). On peut également définir la notion de base relativement à une sous-suite de $\mathbf{N}$ (les entiers pairs dans le problème de Goldbach, par exemple).

Etant donné une suite $A = \{a_k\}$, on définit la fonction $A(n) = \sum_{1 \leq a_k \leq n} 1$ = nombre des a_k compris entre 1 et n. On définit ensuite la densité de Schnirelman de la suite A par:

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n}.$$

Cette définition appelle deux remarques. Primo, on a $1 \in A$ dès que $d(A) > 0$. Secundo, la notion de densité de Schnirelman est très différente de celle, classique, de densité asymptoptique, définie par $\liminf \frac{A(n)}{\mathrm{n}}$. En particulier, $d(A) = 1$ équivaut à $A = \mathbf{N}$, tandis que d. asympt. $(A) = 1$ équivaut à « presque tous les entiers appartiennent à A ». Indiquons enfin une notion intermédiaire, « tous les entiers assez grands appartiennent à A », fréquemment utilisée en théorie additive (théorème de Vinogradov sur les entiers impairs sommes de 3 nombres premiers, constantes $G(k)$ du problème de Waring).

3. Théorèmes de Schnirelman et de Mann

La densité de Schnirelman est un outil remarquable pour prouver que certaines suites sont des bases. Il ne faut pas cependant en attendre plus que des résultats d'existence, avec au mieux une majoration délirante de l'ordre (2.10^{10} pour les nombres premiers, nettement pire dans le problème de Waring par la méthode de Linnik et Khintchine, par exemple), en raison de l'influence très pathologique des premiers termes de la suite (et comme « premiers » n'est jamais que le contraire de « à l'infini », cela peut entraîner fort loin... !).

Les principaux théorèmes en la matière sont les suivants:

Théorème (Schnirelman, 1930). $d(A+B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A)\, d(B)$.

La démonstration, que nous ne donnerons pas ici, est fort simple et s'appuie, modulo la minoration $\forall n\ [A(n) \geqslant n \,.\, d(A)]$, sur un dénombrement très banal.

Lemme. $d(A) + d(B) \geqslant 1 \Rightarrow A + B = \mathbf{N}$.

Une simple affaire de tiroirs, tout aussi banale.