

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES
Autor: Mauclaire, Jean-Loup
Kapitel: 1. DÉMONSTRATION DE 1.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45367>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.

Soit f une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe $l \in \mathbf{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$, alors*

$$f(n) = \frac{l}{\log 2} \log n .$$

2. *S'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|f(2n+1) - f(n)| \leq M$, alors $f(n) = C \log n + g(n)$, où C est une constante et où g est une fonction additive bornée.*

1. DÉMONSTRATION DE 1.

1.1. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On notera $S_k(m) = \frac{2^k m^k - 1}{2m - 1}$ pour k entier ≥ 1 .

D'après notre hypothèse, on a, pour k entier ≥ 2 :

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty);$$

Or $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$. Comme f est additive,

$$f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$\begin{aligned} f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m) \\ = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^k \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\} \\ = (k-1)l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn + 1) - (k-1)f(m) = (k-1)l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn + 1) - f(mn) = l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1)f(m) = kl + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

On pose alors $n = S_k(m) \cdot (2mS_k(m)q + 1)$. D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m) [2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1].$$

Or

$$(S_k(m), 2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1) = (S_k(m), 2^k m^k + 1) = 1.$$

On a donc:

$$(\alpha) \quad f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1).$$

Ensuite, on remarque que $mn = mS_k(m) \cdot (2mS_k(m)q + 1)$ et que $(m, S_k(m)) = (2mS_k(m)q + 1, S_k(m)) = (2mS_k(m)q + 1, m) = 1$.

On obtient donc:

$$(\beta) \quad f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2mS_k(m)q + 1).$$

En substituant les deux relations (α) et (β) dans (A), on obtient:

(A')

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1] - kf(m) - f(2mS_k(m)q + 1) \\ = kl + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1] - f[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)q + 1)] \\ = l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (A'), on a:

$$\begin{aligned} f[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)q + 1)] - kf(m) - f(2mS_k(m)q + 1) \\ = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Comme

$$(2^{k-1}m^k, 2mS_k(m)q+1) = 1,$$

on a

$$f[2^{k-1}m^k(2mS_k(m)q+1)] = f(2^{k-1}m^k) + f(2mS_k(m)q+1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1).$$

Conclusion 1: si $m \in \mathbf{N}^*$, si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, alors:

$$(I) \quad f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l.$$

1.2. — a) Faisant $m = 1$ dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1)l \quad \text{pour } k \geq 2.$$

En particulier, pour $k = 2$, $f(2) = l$. On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = kf(2) = kl \quad \text{pour } k \geq 1.$$

— b) Soit maintenant p un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant $m = p$ dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = kf(p).$$

Conclusion 2: f est complètement additive.

1.3. Comme f est complètement additive, et que $l = f(2)$, notre hypothèse initiale prend la forme $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$, ($n \rightarrow +\infty$). On remarque alors que $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n)+1]$, et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2f(2n+1).$$

On obtient donc:

$$2f(2n+1) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Comme

$$\begin{aligned} 2f(2n) &= 2f(2) + 2f(n), \quad \text{et} \quad f(4n^2 + 4n) = 2f(2) \\ &\quad + f(n) + f(n+1), \end{aligned}$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour $n = 2$, $f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \frac{l}{\log 2}$.

2. DÉMONSTRATION DE 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier ≥ 2 ,

$$(I') \quad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leq (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geq 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leq (k+1)M.$$

En échangeant k et k' , on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geq 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k+k'+2)M,$$