Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

Autor: Mauclaire, Jean-Loup

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45367

SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.

Soit f une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe* $l \in \mathbf{C}$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$, *alors* $f(n) = \dfrac{l}{\operatorname{Log} 2} \operatorname{Log} n$.

2. *S'il existe* $M \in \mathbf{R}^+$ *tel que, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $|f(2n+1) - f(n)| \leqslant M$, *alors* $f(n) = C \operatorname{Log} n + g(n)$, *où* C *est une constante et où* g *est une fonction additive bornée.*

1. Démonstration de 1.

1.1. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On notera $S_k(m) = \dfrac{2^k m^k - 1}{2m - 1}$ pour k entier $\geqslant 1$. D'après notre hypothèse, on a, pour k entier $\geqslant 2$:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = l + \mathrm{o}(1), \quad (n \to +\infty);$$

Or $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$. Comme f est additive,

$$f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m)$$
$$= l + \mathrm{o}(1), \ (n \to +\infty).$$

On obtient donc:

$$\sum_{j=2}^{l} \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\}$$
$$= (k-1)\, l + \mathrm{o}(1) \ (n \to +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn+1) - (k-1) f(m) = (k-1)\, l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn+1) - f(mn) = l + o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1) f(m)) = kl + o(1) \quad (n \to +\infty).$$

On pose alors $n = S_k(m) \,.\, (2m\, S_k(m)\, q + 1)$. D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m) \left[2^k m^k (2m S_k(m)\, q + 1) + 1 \right].$$

Or

$$\left(S_k(m), 2^k m^k (2m S_k(m)\, q + 1) + 1\right) = \left(S_k(m), 2^k m^k + 1\right) = 1\,.$$

On a donc:

$$(\alpha) \qquad f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2m S_k(m)\, q + 1) + 1)\,.$$

Ensuite, on remarque que $mn = m\, S_k(m) \,.\, (2m S_k(m)\, q + 1)$ et que $(m, S_k(m) = (2m S_k(m)\, q + 1, S_k(m)) = (2m S_k(m)\, q + 1, m) = 1\,.$

On obtient donc:

$$(\beta) \qquad f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2m S_k(m)\, q + 1)\,.$$

En substituant les deux relations (α) et (β) dans (A), on obtient:

(A')

$$f\left[2^k m^k (2m S_k(m)\, q + 1) + 1\right] - k f(m) - f(2m S_k(m)\, q + 1) = kl + o(1) \quad (q \to +\infty).$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$f\left[2^k m^k (2m S_k(m)\, q + 1) + 1\right] - f\left[2^{k-1} m^k (2m S_k(m)\, q + 1)\right] = l + o(1) \quad (q \to +\infty).$$

En remplaçant dans (A'), on a:

$$f\left[2^{k-1} m^k (2m S_k(m)\, q + 1)\right] - k f(m) - f(2m S_k(m)\, q + 1) = (k-1)\, l + o(1) \quad (q \to +\infty).$$

Comme

$$(2^{k-1}m^k, 2mS_k(m)q+1) = 1 ,$$

on a

$$f[2^{k-1}m^k(2mS_k(m)q+1)] = f(2^{k-1}m^k) + f(2mS_k(m)q+1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + \mathrm{o}(1) \quad (q \to +\infty) ,$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + \mathrm{o}(1) .$$

Conclusion 1: si $m \in \mathbf{N}^*$, si $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, alors:

(I) $$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l .$$

1.2. — a) Faisant $m = 1$ dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1)l \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2 .$$

En particulier, pour $k = 2$, $f(2) = l$. On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = kf(2) = kl \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1 .$$

— b) Soit maintenant p un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant $m = p$ dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = kf(p) .$$

Conclusion 2: f est complètement additive.

1.3. Comme f est complètement additive, et que $l = f(2)$, notre hypothèse initiale prend la forme $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$, $(n \to +\infty)$. On remarque alors que $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n)+1]$, et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2+4n) = \mathrm{o}(1) \quad (n \to +\infty) .$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2f(2n+1) .$$

On obtient donc:

$$2f(2n+1) - f(4n^2+4n) = \mathrm{o}(1) \quad (n \to +\infty) .$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \to +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \qquad \text{et} \qquad f(4n^2+4n) = 2f(2) + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n .$$

Pour $n = 2, f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \dfrac{l}{\log 2}$.

2. Démonstration de 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier $\geqslant 2$,

$$(\mathrm{I}') \qquad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1)M .$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geqslant 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leqslant (k+1)M .$$

En échangeant k et k', on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k'-1)M .$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geqslant 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k+k'+2)M ,$$

c'est-à-dire:

$$(a) \qquad \left| \frac{f(2^{k'-1})}{k'} - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{2}{kk'} \right) M .$$

Ceci montre que la suite $\left\{ \frac{f(2^{k-1})}{k} \right\}$ est une suite de Cauchy. Elle tend donc vers une limite finie, soit λ.

Comme $\frac{f(2^k)}{k} = \frac{f(2^k)}{k+1} \times \frac{k+1}{k}$, on voit que $\frac{f(2^k)}{k}$ tend vers λ quand k tend vers $+\infty$.

Il est à noter que, si dans (a) on fait tendre k' vers $+\infty$ avec k fixe, on obtient:

$$\left| \lambda - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \frac{M}{k},$$

c'est-à-dire:

$$(b) \qquad |f(2^{k-1}) - k\lambda| \leqslant M .$$

2.1.2. Si maintenant on prend m impair dans (I'), on obtient:

$$|f(2^{k-1}) + f(m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1) M ,$$

d'où:

$$\begin{aligned} |f(m^k) - kf(m)| &\leqslant (k+1) M + |f(2^{k-1})| \\ &\leqslant (k+1) M + k|\lambda| + M , \qquad \text{d'après (b)}, \\ &\leqslant k\left(\left((1 + \frac{2}{k}\right) M + |\lambda|\right) \\ &\leqslant kM' , \end{aligned}$$

où $M' = 3M + |\lambda|$.

En remplaçant m par $m^{k'}$ $(k' \geqslant 1)$, on obtient:

$$|f(m^{kk'}) - kf(m^{k'})| \leqslant kM' .$$

En intervertissant k et k', on a:

$$|f(m^{kk'}) - k'f(m^k)| \leqslant k'M' .$$

Il résulte de là que, quel que soit m *impair*, et quels que soient k et $k' \geqslant 1$, on a:

$$|kf(m^{k'}) - k'f(m^k)| \leqslant (k+k')M',$$

c'est-à-dire:

$$\text{(c)} \qquad \left|\frac{f(m^{k'})}{k'} - \frac{f(m^k)}{k}\right| \leqslant \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}\right)M'.$$

Ceci montre que, pour chaque m impair, la suite $\left\{\frac{f(m^k)}{k}\right\}$ est une suite de Cauchy, et tend donc vers une limite finie.

2.2. On voit que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\frac{f(m^k)}{k}$ tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$.
On vient de le montrer dans le cas où m est impair. Si maintenant m est pair, on peut écrire:

$$m = 2^\alpha m', \quad \text{avec} \quad \alpha \geqslant 1 \quad \text{et} \quad m' \text{ impair.}$$

On a alors:

$$\frac{f(m^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha}m'^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha})}{k} + \frac{f(m'^k)}{k} = \alpha \cdot \frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha} + \frac{f(m'^k)}{k}.$$

Le dernier terme tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$ puisque m' est impair. D'autre part, d'après ce que l'on a vu au § 1.1., $\frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha}$ tend vers λ.

2.3. Ceci dit, définissons les fonctions f^* et g_1 sur $\mathbf{N}^*$ par:

$$f^*(m) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(m^k)}{k} \qquad \text{et} \qquad g_1(m) = f(m) - f^*(m).$$

On a donc $f(m) = f^*(m) + g_1(m)$.

On va montrer successivement que g_1 est bornée, puis que f^* est complètement additive, de sorte que g_1 est additive.

2.3.1. Tout d'abord, si m est impair, en prenant $k = 1$ dans (c), et faisant tendre k' vers $+\infty$, on obtient:

$$|f^*(m) - f(m)| \leqslant M', \text{ c'est-à-dire } |g_1(m)| \leqslant M'.$$

Si maintenant m est pair, d'après ce que l'on a vu plus haut, en posant:

$m = 2^\alpha m'$, avec $\alpha \geqslant 1$ et m' impair, on a:

$$f^*(m) = \alpha\lambda + f(m'),$$

d'où:

$$\begin{aligned} g_1(m) &= f(m) - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= f(2^\alpha) + f(m') - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= g_1(m') + \big(f(2^\alpha) - (\alpha+1)\lambda\big) + \lambda. \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que l'on vient de voir et de (b), où $k = \alpha + 1$, on voit que:

$$|g_1(m)| \leqslant M' + M + |\lambda| \quad (=4M+2|\lambda|).$$

2.3.2. f^* est additive car, si $(m, n) = 1$, on a pour $k \geqslant 1$

$$\frac{f((mn)^k)}{k} = \frac{f(m^k n^k)}{k} = \frac{f(m^k)}{k} + \frac{f(n^k)}{k},$$

ce qui donne en faisant tendre k vers $+\infty$: $f^*(mn) = f^*(m) + f^*(n)$.

2.3.3. f^* est complètement additive, car, quels que soient p premier et $\alpha > 1$,

$$\frac{f((p^\alpha)^k)}{k} = \alpha \frac{f(p^{\alpha k})}{\alpha k},$$

d'où, par passage à la limite $f^*(p^\alpha) = \alpha f^*(p)$.

2.4. Par le même procédé que dans 1.3, on démontre que $f^*(n+1) - f^*(n) = 0(1)$; utilisant alors un résultat de Wirsing [2], on a:

$$f^*(n) = C \log n + g_2(n),$$

où C est une constante et g_2 est une fonction additive bornée.

On a donc:

$$f(n) = C \log n + g_1(n) + g_2(n),$$

ce qui est bien le résultat cherché puisque $g_1 + g_2$ est une fonction additive bornée.

3. Remarques

3.1. Par des procédés tout à fait analogues à ceux que l'on vient d'employer, on pourrait démontrer que:

1) *Si f est additive, et si* $\lim_{n \to +\infty} \{f(2n+1) - f(2n)\} = 0$, *alors* $f(n) = C \log n$, *où C est une constante.*

2) *Si f est additive, s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que* $|f(2n+1) - f(2n)| \leqslant M$ *pour tout n, alors* $f(n) = C \log n + g(n)$, *où C est une constante et g une fonction additive bornée.*

3.2. Le problème traité ici a été posé et résolu partiellement par I. Kátai et F. Skof (voir [3] et [4]).

RÉFÉRENCES

[1] P. Erdös, On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math.*, 47 (1946) pp. 4-20.

[2] Wirsing. On a characterization of Log n as an additive function. *Proceedings of the Rome conference of Number Theory*, (1968).

[3] I. Kátai, Some results and problems on the theory of additive functions. *Acta Sci. Math.* (Szeged), *30* (1969), Fasc. 3-4, pp. 305-312.

[4] F. Skof. Sulle funzioni $f(n)$ aritmetiche additive asintotiche a $C \log n$. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. 103* (1969), pp. 931-938.

(Reçu le 20 décembre 1971)

Jean-Loup Mauclaire
Université catholique de l'Ouest
B.P. 858
49 - Angers - (France)