**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 18 (1972)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

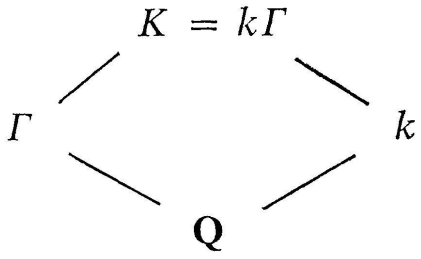
**Artikel:** ARITHMÉTIQUE DANS DES EXTENSIONS FINIES DU CORPS DES QUOTIENTS DE CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER

**Autor:** Moser, Nicole

**Kapitel:** IV. Bases entières d'une extension quadratique.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-45366

Comme $[L_n:K_n]$ divise $p-1$, pour que $\mathfrak{q}$ soit totalement décomposé dans $K_n/k$, il faut et il suffit qu'il le soit dans $L_n/k$. Et l'on obtient que le corps de décomposition de $\mathfrak{q}$ dans $K/k$ est de degré fini sur $k$.




. Supposons maintenant que $\mathscr{P}$ divise $p$, et soit $\Gamma$ la $\Gamma$-extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ associée à $p$. On sait que $p$ est totalement ramifié dans $\Gamma/\mathbf{Q}$. En utilisant la branche $\mathbf{Q} \,.\, k \,.\, K$ du diagramme, on obtient encore que le corps de décomposition de $\mathscr{P}$ est de degré fini sur $k$.

Remarque: On pourrait chercher à généraliser la proposition 4 au cas d'une $\Gamma$-extension quelconque d'un corps de nombres. En fait, ce résultat est faux. Montrons-le à partir d'un exemple dû à Hasse et décrit par B. Martel dans [10]. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ un corps quadratique imaginaire. Définissons le groupe de congruences $H_n$ modulo $p^{n+1}$ comme groupe des idéaux principaux $(x)$ de $k$, premiers à $p$, et tels qu'il existe un rationnel $r$ vérifiant $x \equiv r$ modulo $p^{n+1}$. Si $L_n$ est le corps de classes sur $k$ associé à $H_n$, et $K_n$ la $p$-extension maximale de $k$ dans $L_n$, $K = \bigcup_n K_n$ est une $\Gamma$-extension de $k$ linéairement disjointe sur $k$ de la $\Gamma$-extension cyclotomique. F. Bertrandias nous a fait remarquer que si $q$ est un nombre premier rationnel inerte dans $k/\mathbf{Q}$, et distinct de $p$, l'idéal $(q)$ de $k$ appartient à $H_n$ quel que soit $n$. Donc $(q)$ est totalement décomposé dans $K/k$.

Plus généralement, tout corps de nombres qui contient une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$ admet une $\Gamma$-extension qui n'est pas de type $J$.

## IV. Bases entières d'une extension quadratique.

### 1. *Critère d'existence d'une base entière.*

H. B. Mann précise dans [9] le critère d'Artin, lorsque $L/K$ est une extension quadratique du corps des quotients $K$ d'un anneau de Dedekind. Il énonce les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 4 (Mann).

*Soit L une extension quadratique d'un corps K de caractéristique différente de 2. Pour que B soit A-libre, il faut et il suffit que l'idéal $\Delta_{L/K}$ soit principal, et engendré par D tel que $L = K(D^{1/2})$.*

THÉORÈME 5 (Mann).

*Soit $L = K(a^{1/2})$ une extension quadratique d'idéal discriminant $\Delta$. Posons $(a) = \mathfrak{a}^2\mathfrak{c}$ et $\Delta = \delta^2\mathfrak{c}'$, ou $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ sont des idéaux entiers sans facteur carré. L'extension L/K admet une base entière si et seulement si $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{a} \sim \delta$ (modulo les idéaux principaux).*

Le théorème 4 se généralise facilement au cas où $K$ est une extension infinie du corps des quotients d'un anneau de Dedekind, de caractéristique différente de 2. Reprenons les notations du début. Supposons que $L$ soit une extension quadratique de $K$, de discriminant un idéal principal engendré par l'entier $D_1$. Il existe un indice $\alpha_0$ tel que pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$. $D_1$ appartienne *à* $A_\alpha$.

Supposons que $L/K$ admette une base entière $\{\lambda, \mu\}$. Considérons un indice $\alpha \geqq \alpha_0$, tel que $B_\alpha$ contienne $\lambda$ et $\mu$ : $\{\lambda, \mu\}$ est une base entière de $L_\alpha/K_\alpha$, et le théorème 4 donne $L_\alpha = K_\alpha(D^{1/2})$, $D$ étant un générateur du discriminant. D'où $L = K(D^{1/2})$.

Inversement, si $L = K(D_1^{1/2})$, $L_\alpha = K_\alpha(D_1^{1/2})$. En appliquant le théorème 4 aux extensions $L_\alpha/K_\alpha$ telles que $\alpha \geqq \alpha_0$, on obtient que $L/K$ admet une base entière.

Pour généraliser le théorème 5, il nous faut une théorie de la divisibilité. *C'est pourquoi nous supposerons, pour le reste de ce paragraphe, que K est un corps de type J.*

*Lemme.*

*Soient p un entier, et $\mathfrak{a}$ un idéal de K. $\mathfrak{a}$ se décompose de manière unique en produit*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^p\,\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$$

$\mathfrak{b}$: *idéal fractionnaire dont toutes les composantes non triviales sont dans des stries finies.*

$\mathfrak{c}$: *idéal entier sans facteur puissance p-ième, dont toutes les composantes non-triviales sont dans des stries finies.*

$\mathfrak{c}'$: *idéal dont toutes les composantes non triviales sont dans des stries non finies.*

L'idéal $\mathfrak{a}$ se décompose de manière unique en produit d'idéaux $\mathfrak{a}_i$:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_l$$

chaque $\mathfrak{a}_i$ appartenant à une strie maximale. Notons $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal équivalent à $\mathfrak{a}_i$, et ordonnons les indices de manière que $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_j$ soient de type fini, et que $\mathfrak{m}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{m}_l$ ne le soient pas. Posons $\mathfrak{m}_i \cap k = \mathscr{P}_i$.

Puisque $K$ est de type $J$, il n'existe dans $K$ qu'un nombre fini d'idéaux premiers au-dessus de $\mathscr{P}_i$. Lorsque $1 \leq i \leq j$, on peut donc trouver un indice $\alpha_i$ tel que l'idéal $\mathscr{P}_i$ reste inerte dans $K/K_{\alpha_i}$. Posons alors $\chi = K_{\alpha 1} \ldots K_{\alpha_j}$; c'est une extension finie de $k$. Et dans $\chi$, l'idéal $(\prod_{i=1}^{j} \mathfrak{a}_i) \cap \chi$ se décompose de manière unique en:

$$(\prod_{i=1}^{j} \mathfrak{a}_i) \cap \chi = \mathfrak{b}_1{}^p \mathfrak{c}_1$$

$\mathfrak{c}_1$ idéal entier sans facteur puissance $p$-ième. L'idéal $\mathfrak{c}_1$ reste inerte dans $K/\chi$, donc son étendu est sans facteur puissance $p$-ième.

On peut choisir alors comme idéaux $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ : $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 A$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 A$ et $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}_{j+1} \times \ldots \times \mathfrak{a}_l$.

L'unicité de cette décomposition provient de l'unicité de la décomposition en produit d'idéaux appartenant à des stries maximales.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat analogue au théorème 5:

*Proposition* 5.

*Soient $K$ un corps de type $J$, de caractéristique différente de 2, et $L = K(a^{1/2})$ une extension quadratique d'idéal discriminant $\Delta$. Utilisons le lemme pour écrire*

$$(a) = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}\mathfrak{b}', \qquad \Delta = \mathfrak{c}^2 \delta \delta' .$$

*Le $A$-module $B$ est libre si et seulement si l'on peut trouver $\alpha \in K^*$ tel que*

$$\mathfrak{c}^2 \delta' = (\alpha^2)\, \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{b} = \delta .$$

En effet, si $\mathfrak{b} = \delta$ et $\mathfrak{c}^2\delta' = (\alpha^2)\, \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}'$, $\Delta = (\alpha^2)\, \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}'\mathfrak{b} = (a\alpha^2)$. Le discriminant de l'extension $L/K$ est principal, de générateur $a\alpha^2$, et $L = K((a\alpha^2)^{1/2})$. La généralisation du théorème 4 permet de conclure que $B$ est $A$-libre.

Inversement, si $B$ est $A$-libre, l'idéal $\Delta$ est principal; en vertu du même théorème, il est engendré par $D$ tel que $L = K(D^{1/2})$. Donc

$$a^{1/2} = x + yD^{1/2} \quad (x \text{ et } y \text{ éléments de } K).$$

Elevons au carré:

$$a = x^2 + y^2D + 2xyD^{1/2}.$$

Nécessairement $x = 0$ et $a = y^2D$.

$$\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}\mathfrak{b}' . = y^2\mathfrak{c}^2\delta\delta' .$$

D'après le lemme

$$\mathfrak{b} = \delta \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}' = (y^2)\mathfrak{c}^2\delta' .$$

## 2. *Détermination explicite d'une base entière.*

Plaçons-nous dans le cas particulier où $K$ est une extension infinie de $\mathbf{Q}$ : $K = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n$, avec $[K_n:\mathbf{Q}] < \infty$. Soit $L = K(\sqrt{a})$ une extension quadratique de $K$. Supposons qu'elle admette une base entière $\{\lambda, \mu\}$: il existe alors un indice $n_0$ tel que pour $n \geqq n_0$, $\{\lambda, \mu\}$ soit une base entière de $L_n = K_n(\sqrt{a})/K_n$. Nous sommes donc ramenés à la recherche d'une base entière d'une extension quadratique d'un corps de nombres.

Ce problème a été résolu par Fröhlich (Discriminants of algebraic number fields [5]). Il montre que lorsqu'on connait l'existence d'une base entière, on peut trouver un générateur $d$ de l'idéal discriminant, et un entier $\beta$ tel que

$$d - \beta^2 \equiv 0 \text{ modulo } 4.$$

Comme base entière, on trouve alors $\{1, \dfrac{\beta + \sqrt{d}}{2}\}$.

## 3. *Une condition suffisante d'existence d'une base normale.*

*Proposition* 6.

*Soit $L$ une extension quadratique d'un corps de nombres $K$. Pour que l'anneau des entiers $B$ de $L$ admette une $A$-base normale, il suffit que $B$ soit $A$-libre, que $B/A$ soit modérément ramifiée, et que 2 soit totalement décomposé dans $K/\mathbf{Q}$.*

Il est évidemment nécessaire qu'il existe une base entière. On sait aussi que la condition « être modérément ramifiée » est nécessaire pour toute extension finie d'un corps de nombres. (cf. J. Martinet [11]).

Supposons donc que $L/K$ admette une base entière; d'après le paragraphe précédent, nous pouvons la prendre de la forme $\{1, \frac{\beta + \sqrt{d}}{2}\}$, où $d$ est un générateur de l'idéal discriminant, et $\beta$ un entier tel que $\beta^2 - d \equiv 0\ (4)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $L/K$ admette une base normale est qu'il existe deux éléments $x$ et $y$ de $A$ tels que:

$$\left( \begin{vmatrix} x + y\frac{\beta + \sqrt{d}}{2} & x + y\frac{\beta - \sqrt{d}}{2} \\ x + y\frac{\beta - \sqrt{d}}{2} & x + y\frac{\beta + \sqrt{d}}{2} \end{vmatrix}^2 \right) = (d)$$

$$\left(y^2\, d\,(2x + y\beta)^2\right) = (d)\,.$$

Comme $x$, $y$, $d$ et $\beta$ sont des entiers, il faut et il suffit que $y$ et $2x + y\beta$ soient des unités de $A$.

En particulier, $2x + y\beta$ doit être une unité $\mathfrak{P}$-adique pour tout idéal $\mathfrak{P}$ divisant 2. Donc $\beta$ doit être une unité $\mathfrak{P}$-adique. Comme $d \equiv \beta^2\ (4)$, on obtient que $d$ doit être une unité $\mathfrak{P}$-adique pour tout $\mathfrak{P} \mid 2$. Cela équivaut à la ramification modérée de $B/A$.

Supposons maintenant 2 totalement décomposé dans $K/\mathbf{Q}$. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $A$ divisant 2, $A/\mathfrak{P}$ est un corps à deux éléments. Choissons un élément $\pi$ dans $\mathfrak{P}\backslash\mathfrak{P}^2$. Tout élément de $A/\mathfrak{P}^2$ peut-être représenté par

$$m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\pi \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}\,.$$

Si $m$ est une unité $\mathfrak{P}$-adique, $\varepsilon_1 = 1$. Alors

$$m^2 = 1 + 2\varepsilon_2\pi + \varepsilon_2^2\pi^2 \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}^2\,.$$

Tous les carrés d'unités $\mathfrak{P}$-adiques sont congrus à 1 mod $\mathfrak{P}^2$. En particulier

$$\beta^2 \equiv 1 \text{ modulo } 4.$$

Comme valeur de $\beta$, on peut choisir 1. Prenons alors $x = 0$, $y = 1$: $B$ admet une $A$-base normale engendrée par $\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$.

*Corallaire.*

*Soit* $L = K(a^{1/2})$ *une extension quadratique d'une extension infinie* $K$ *de* $\mathbf{Q}$, *de type J. Pour que l'anneau des entiers* $B$ *de* $L$ *admette une* $A$*-base normale, il suffit que*

. $B$ *soit* $A$-libre

. $B/A$ *soit modérément ramifiée*

. *il existe dans* $K$ *une extension finie* $k$ *de* $\mathbf{Q}$ *telle que* $[k\ a^{1/2}):k] = 2$,

*que le discriminant de* $L/K$ *soit l'étendu du discriminant de* $k(a^{1/2})/k$, *et que* 2 *soit totalement décomposé dans* $k/\mathbf{Q}$.

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de voir que $k$ vérifie les hypothèses de la proposition 6. L'extension $k(a^{1/2})/k$ admet une base entière, grâce à la proposition 5. Elle est modérément ramifiée: son discriminant est premier à 2, comme celui de $L/K$. Enfin 2 est totalement décomposé dans $k/\mathbf{Q}$.

Exemple: Considérons le corps $K = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \zeta_n)$ où $\zeta_n$ est une racine primitive $3^n$-ième de l'unité. Si $\theta = 1 + 4\sqrt{-7}$, $L = K(\theta^{1/2})$ est une extension quadratique de $K$.

Déterminons le discriminant de $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$. L'idéal premier $(1+4\sqrt{-7})$ se ramifie dans l'extension considérée; il figure donc avec l'exposant 1 dans le discriminant. Les seuls idéaux distincts de $(1+4\sqrt{-7})$ qui peuvent se ramifier dans $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ sont les idéaux au-dessus de 2. Or, dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$,

$$(2) = \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right).$$

D'autre part

$$1 + 4\sqrt{-7} \equiv \left(\frac{1+3\sqrt{-7}}{2}\right)^2 \bmod \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^2$$

et

$$1 + 4\sqrt{-7} \equiv \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^2 \bmod \left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)^2.$$

D'après la théorie de Kummer, les idéaux au-dessus de 2 sont non ramifiés dans l'extension $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$; le discriminant de cette extension vaut exactement $(1+4\sqrt{-7})$. Le théorème 5 permet d'affirmer que $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ vérifie toutes les hypothèses de la proposition 6: cette extension admet donc une base normale entière, engendrée par $\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{-7}}}{2}$.

On vérifie aisément que le discriminant de $L/K$ est l'étendu de celui de $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$. Donc $L/K$ admet aussi une base normale entière engendrée par $\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{-7}}}{2}$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ARTIN, E. Questions de base minimale dans la théorie des nombres algébriques. *Coll. Int. CNRS*, vol. 24 (1950), pp. 19-20.

[2] BOURBAKI, N. *Algèbre commutative*. Chap. 7, Hermann, Paris.

[3] —— *Algèbre commutative*. Chap. 6, Hermann, Paris.

[4] CHEVALLEY, C. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *Journal of the Fac. of Science*, Tokyo, vol. 2, part. 9 (1933).

[5] FRÖHLICH, A. Discriminants of algebric number fields. *Math. Zeitschr. 74*, pp. 18-28 (1960).

[6] HECKE, E. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*. Leipzig (1923). Réimpression: New York (1948).

[7] JAFFARD, P. Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. *Bull. Soc. Math. de France*, vol. 80 (1952), pp. 61-94.

[8] KAPLANSKY, J. Modules over Dedekind rings and valuation rings. *Trans. AMS*, vol. 72 (1952), pp. 327-340.

[9] MANN, H. B. On integral bases. *Proc. AMS*, vol. 9 (1958), pp. 167-172.

[10] MARTEL, B. *Γ-extensions d'un corps quadratique imaginaire*. Séminaire Th. Nb, Grenoble, fév. 1971.

[11] MARTINET, J. Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre $2p$. *Ann. Inst. Fourier*, tome 19, fasc. 1 (1969), pp. 1-79.

[12] SAMUEL, P. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, Paris 1967.

[13] SERRE, J.-P. *Corps locaux*. Hermann, Paris 1968.


*Reçu le 10 décembre 1971*

Nicole Moser
Institut de Mathématiques Pures
B.P. 116
38 — St-Martin-d'Hères, France