

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE DELSARTE  
**Autor:** Weil, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45363>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE DELSARTE <sup>1</sup>

par André WEIL

Sufro de aquel amigo que murió y  
que era como yo buen carpintero.  
(Pablo NERUDA)

Comme il a été indiqué dans la notice biographique, ce n'est guère auprès de leurs maîtres que Delsarte et ses camarades pouvaient trouver l'inspiration pour leurs premiers travaux. Quant à se faire « donner un sujet », l'idée n'en venait à personne, car la tradition française, saine à cet égard du moins, voulait que le débutant se trouvât lui-même un problème à son goût, le rôle des maîtres étant de donner des conseils parfois, mais surtout des encouragements. Ce fut donc un très grand mérite de la part de Delsarte, à peine sorti de l'Ecole Normale, d'avoir entrepris l'étude des groupes d'opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert. Malheureusement la question n'était pas mûre, et, pour l'aborder, Delsarte souffrait d'un lourd handicap. Il n'est jamais facile pour un jeune mathématicien de se dégager de l'influence du milieu où le hasard l'a placé; quand l'orientation qu'il y trouve n'est pas la bonne, et que par surcroît il n'a pas su se familiariser de bonne heure avec les langues étrangères, la difficulté devient à peu près insurmontable. En ce qui concerne l'« espace fonctionnel », la tradition où puisait Delsarte accordait une importance excessive à l'équation de Fredholm. C'est donc exclusivement aux sous-groupes du « groupe de Fredholm » que Delsarte consacre ses premiers travaux ([1]-[14] et [22]) <sup>2</sup>; il nomme ainsi, dans l'espace de Hilbert (réel) des fonctions de carré sommable dans  $[0, 1]$ , le groupe des opérateurs  $f \rightarrow f + Tf$ , où  $T$  est (comme on dirait aujourd'hui) un opérateur « de Hilbert-Schmidt », c'est-à-dire de la forme

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

<sup>1</sup>) *Note de la Rédaction.* — Cette analyse de l'œuvre mathématique de Delsarte figure dans le tome I des *Œuvres de Jean Delsarte*, publiées par le Centre National de la Recherche Scientifique, 15, quai Anatole-France, Paris 7<sup>e</sup>. Nous la reproduisons avec l'aimable autorisation de l'auteur et du C.N.R.S. On trouvera, dans ce même volume, une notice biographique sur Delsarte, due également à André Weil. Rappelons que Delsarte est né le 19 octobre 1903 et décédé le 28 novembre 1968.

<sup>2</sup>) Les numéros renvoient à la liste chronologique des travaux de Delsarte (pp. 135-140); il est renvoyé aux inédits (p. 139) par In. 1, ..., In. 11.

avec un noyau  $K$  de carré sommable dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ . En fait, Delsarte suppose même que les intégrales  $\int_0^1 K^2 dx$ ,  $\int_0^1 K^2 dy$  sont toutes deux bornées dans  $[0, 1]$ ; cette hypothèse est introduite, en partie en raison d'une technique de l'intégration encore peu sûre, mais aussi pour garantir l'invariance, par les opérateurs en question, de notions dues à Gâteaux (suites « également » et « normalement » denses, « moyenne » d'une fonctionnelle, etc.) auxquelles, en France du moins, on attachait alors quelque importance. En premier lieu, Delsarte s'attaque aux opérateurs orthogonaux appartenant à ce « groupe de Fredholm », et, pour en déterminer les valeurs propres, introduit aussitôt la transformation de Cayley ([8], § 2): idée brillante dont v. Neumann, plus heureusement placé, devait bientôt, indépendamment de Delsarte, tirer le parti que l'on sait. Dans le même ordre d'idées, mais toujours dans le cadre trop étroit du « groupe de Fredholm », Delsarte en vient bientôt ([14]) à l'étude des sous-groupes de Lie de ce groupe, et d'abord des groupes à un paramètre et de leurs transformations infinitésimales; il étend à ceux-ci, sans trop de peine, les résultats classiques, puis se pose à leur sujet des questions variées, qui témoignent de l'ingéniosité de son esprit, mais dont il ne semble pas qu'il y ait grand-chose à retenir, non plus que de ses observations sur les groupes à deux paramètres; on notera seulement que c'était là une première tentative, bien prématurée, pour aborder l'étude des représentations d'un groupe résoluble dans l'espace de Hilbert.

Ces recherches prennent fin avec un fascicule du *Mémorial* ([22]), d'esprit déjà nettement plus moderne, paru en 1932 mais certainement écrit bien avant cette date; on est surpris néanmoins que le nom de v. Neumann ne figure pas dans sa bibliographie. Sans doute Delsarte prit-il connaissance vers cette époque des travaux de celui-ci, du livre de Stone et surtout de celui de Banach, et comprit-il que dans cette voie il était largement dépassé. Aussi le voyons-nous se tourner aussitôt vers de tout autres problèmes.

Par tempérament, il s'était toujours intéressé aux questions de physique mathématique; sans doute y avait-il en lui, si l'époque s'y fût mieux prêtée, l'étoffe des grands physico-mathématiciens du siècle précédent, d'un Fourier, d'un Poisson. En 1929 déjà il avait, sous l'influence de Villat, traité un problème de théorie des tourbillons ([15]-[16]), et fait voir aussi comment on peut aboutir à la théorie de Schrödinger, alors dans sa nouveauté, à partir de considérations très classiques ([18], [In. 1]). Dans les années qui suivent, il aborde, dans un esprit tout classique aussi, une question posée par la relativité. Il part d'une observation très simple: tous les  $ds^2$  explicitement connus, solutions des équations d'Einstein (avec ou

sans matière) sont d'un type particulier qu'il qualifie de « binaire » (et qu'on pourrait appeler « à variables partiellement séparées »):

$$ds^2 = \varphi(\xi)^2 \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j + f(x)^2 \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\xi) d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

où on a posé  $x = (x^1, \dots, x^p)$ ,  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^q)$ . Cela posé, Delsarte n'hésite pas à rechercher *tous* les  $ds^2$  de cette forme, solutions des équations d'Einstein; il y parvient dans plusieurs cas importants ([24]-[29]), non sans retrouver au passage la solution de Friedmann et Lemaître. « Le problème se réduit », écrit-il à propos du cas le plus intéressant, « à l'intégration du système formé par ces deux équations [de Monge-Ampère]. Il est remarquable qu'on puisse obtenir des formules d'intégration complète avec des fonctions arbitraires. Les systèmes en question sont évidemment assez compliqués, et il ne paraît pas aisé d'expliquer pourquoi la méthode que nous allons indiquer réussit... ». Là, comme plus tard dans le travail ([39]-[41]) sur la diffraction (qui, lui, aboutit à la solution d'équations intégral-différentielles), on demeure stupéfait de sa virtuosité au travers de calculs où l'on ne voit pas quelle intuition a pu le guider. La solution est suivie ([28], Chap. III) de la discussion qualitative des résultats obtenus dans le cas d'un  $ds^2$  « à évolution sphérique »; celle-ci fait apparaître des singularités, cavitations, fonctions multiformes, assez surprenantes du point de vue physique, mais dont le mathématicien ne saurait, sans sortir de son rôle, prétendre tirer des conclusions.

Ensuite s'ouvre pour Delsarte une période particulièrement active et féconde. Parmi les méthodes générales de développements en série hérités du XIX<sup>e</sup> siècle, le premier quart du XX<sup>e</sup> avait surtout retenu les développements en séries de fonctions orthogonales; c'était là l'aboutissement naturel de l'œuvre de Lebesgue et de celle de Hilbert. Même les développements en séries d'exponentielles qui apparaissent dans la théorie de Bohr pouvaient être insérés dans le même cadre, comme H. Weyl le fit voir dans un travail célèbre. Cependant, dès ses premières recherches sur l'espace de Hilbert, Delsarte avait observé qu'on peut, dans cet espace même, utiliser des « coordonnées obliques » qui mettent en évidence des phénomènes nouveaux. Surtout, la pratique assidue de « Whittaker et Watson » <sup>1)</sup>, ainsi que du grand Traité de Watson sur les fonctions de Bessel, lui avait fait connaître des développements de type tout différent, et lui avait fait voir

<sup>1)</sup> Il s'agit naturellement du classique ouvrage: E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge 1927, volume qui, pendant une grande partie de la vie de Delsarte, ne quitta pas sa table de travail.



que, dans chaque cas, le formalisme préexiste à toute considération sur le mode de convergence de la série à étudier et conditionne celui-ci. C'est donc aux formalismes qui sont à la base de ces développements que Delsarte accordera en premier lieu son attention. D'une manière générale, il s'intéresse à tous les cas où on peut définir, dans un « espace fonctionnel »  $A$ , une suite de fonctions  $\varphi_i$  et de « fonctionnelles linéaires »  $L_i$  telles que toute fonction  $f$  appartenant à  $A$  soit déterminée d'une manière unique par le développement formel

$$f \sim S(f) = \sum L_i(f) \varphi_i$$

et que celui-ci converge vers  $f$  en un sens à préciser chaque fois. Evidemment une condition nécessaire pour cela est que les  $\varphi_i$  forment, en un sens convenable, un « système complet » dans  $A$  et qu'on ait les relations de « biorthogonalité »  $L_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ .

Un premier exemple important, découvert par Delsarte, est celui des fonctions « moyenne-périodiques » qu'il introduit ([30]-[33]) à partir de 1934. La théorie des fonctions presque périodiques avait fait une profonde impression lors de sa création par H. Bohr; elle reposait évidemment sur la considération du groupe des translations de la droite (ou, ce qui revient au même, de sa transformation infinitésimale,  $D = d/dx$ ); une tentative de généralisation aux groupes de Lie non commutatifs n'avait rien donné d'utile. Delsarte, sans quitter d'abord le groupe des translations de la droite, propose une généralisation d'un type tout différent. Soit  $K$  une fonction à support compact sur  $\mathbf{R}$ ; une fonction  $f$  sera dite *moyenne-périodique* (de l'espèce définie par  $K$ ) si l'on a, pour tout  $x$ :

$$(f * K)(x) = \int f(x-y) K(y) dy = 0;$$

naturellement,  $K$ , puis  $f$ , sont supposés tels que leur convolution  $f * K$  ait un sens. On peut aussi, comme l'ont fait plus tard L. Schwartz, Kahane et Delsarte lui-même, remplacer  $K$  par une mesure ou même une distribution, mais toujours à support compact (cf. [63], qui contient une bibliographie de la question jusqu'en 1960). Le cas particulier des fonctions périodiques s'obtient, soit en prenant pour  $K$  la mesure égale à  $-1$  en  $x = 0$  et à  $+1$  en  $x = a$ , soit (comme le fait Delsarte) en prenant  $K = 1$  dans  $[0, a]$  et  $K = 0$  en dehors de cet intervalle; avec ce dernier choix,  $f * K = 0$  exprime que  $f$  est périodique de période  $a$  et de moyenne nulle, d'où sans doute le nom adopté par Delsarte. D'ailleurs, dès qu'on introduit quelques notions simples sur les espaces fonctionnels considérés

comme espaces vectoriels topologiques (ce qu'il n'était guère possible de faire en 1934), on observe aussitôt ce qui suit:  $f$  étant donnée, pour qu'il existe (par exemple) une mesure  $\mu$  à support compact, telle que  $f * \mu = 0$ , il faut et il suffit que, dans l'espace  $V$  des fonctions continues sur  $\mathbf{R}$  avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, l'espace engendré par  $f$  et ses translatées ait une adhérence  $V_f \neq V$ . On a donc affaire à un problème typique d'« analyse » et « synthèse » spectrales: l'analyse consistera ici à rechercher les sous-espaces de  $V_f$  de dimension finie, invariants par translation; la synthèse consiste à écrire  $f$  comme combinaison linéaire (en un sens à définir) de fonctions appartenant à ces sous-espaces. Or il est clair que les fonctions dont les translatées engendrent un vectoriel de dimension finie sont les « exponentielles-monômes »  $x^n e^{\alpha x}$ ; de plus, pour que  $x^n e^{\alpha x}$  soit solution de  $f * \mu = 0$ , il faut et il suffit que  $\alpha$  soit un zéro d'ordre  $> n$  de la fonction entière

$$F(z) = \int e^{-zx} d\mu(x),$$

« indicatrice » de la mesure  $\mu$ . Heuristiquement, on cherchera donc à associer à toute solution  $f$  de  $f * \mu = 0$  une série

$$(1) \quad S(f) = \sum_{\alpha} \left( \sum_{i=0}^{n(\alpha)-1} c_{\alpha i} x^i e^{\alpha x} \right)$$

où les  $\alpha$  sont les zéros de  $F$  et les  $n(\alpha)$  leurs multiplicités respectives; ces zéros, avec leurs multiplicités, forment le « spectre » de  $\mu$ .

Soit  $I$  le plus petit intervalle fermé contenant le support de  $\mu$  (dans la généralisation à  $\mathbf{R}^n$ , on prendrait pour  $I$  l'enveloppe fermée convexe de ce support). Choisissons  $a \in \mathbf{R}$  arbitrairement; pour  $f$  solution de  $f * \mu = 0$ , convenons de noter  $f \cdot$  la fonction définie par  $f \cdot (x) = f(x)$  pour  $x \geq a$  et  $f \cdot (x) = 0$  pour  $x < a$ , puis  $\mu_f$  la mesure  $f \cdot * \mu$ . Alors  $\mu_f$  a son support contenu dans  $I + a$ ; on notera  $F_f$  son indicatrice. Soit encore  $g$  une solution de  $g * \mu = 0$ ; on définira de même  $g \cdot$ ,  $\mu_g$ ,  $F_g$ . Delsarte introduit la fonctionnelle bilinéaire

$$K(f, g) = \iint_D f(-x) g(x-y) dx d\mu(y)$$

où  $D$  est le domaine défini par  $x \leq A$ ,  $y - x \leq B$ ,  $y \in I$ , avec  $A + B$  suffisamment grand; les hypothèses faites sur  $f$  et  $g$  entraînent en effet qu'alors  $K(f, g)$  est indépendant de  $A$  et  $B$ . Remplaçant  $x$  par  $y - x$ , on voit que  $K(f, g)$  est symétrique. Prenant  $B = -a$ , puis échangeant  $f$  et  $g$ , on obtient

$$K(f, g) = \int f(-x) d\mu_g(x) = \int g(-x) d\mu_f(x);$$

on voit de même, plus généralement, que  $f * \mu_g = g * \mu_f$ . En particulier, pour  $f = x^i e^{\alpha x}$ ,  $g = x^j e^{\beta x}$  (où par suite  $\alpha, \beta$  appartiennent au spectre, et  $i < n(\alpha)$ ,  $j < n(\beta)$ ), on trouve facilement que  $K(f, g) = 0$  lorsque  $\alpha \neq \beta$ . Si on suppose le spectre formé de points *simples*, on voit donc que les exponentielles  $e^{\alpha x}$  forment un système orthogonal par rapport à la forme quadratique  $K(f, f)$ ; dans ce cas, d'ailleurs, on a

$$K(e^{\alpha x}, e^{\alpha x}) = F'(\alpha),$$

d'où, formellement, la valeur des coefficients de (1):

$$c_{\alpha 0} = F'(\alpha)^{-1} K(f, e^{\alpha x})$$

si l'on admet provisoirement que les  $e^{\alpha x}$  forment un système complet dans l'ensemble des solutions de  $f * \mu = 0$ .

Revenons au cas général, et prenons de nouveau  $f(x) = x^i e^{\alpha x}$ , avec  $i < n(\alpha)$ ; pour ce choix de  $f$ , écrivons  $\mu_{\alpha i}$ ,  $F_{\alpha i}$  au lieu de  $\mu_f$ ,  $F_f$ . On a:

$$F_{\alpha i}(z) = i! (z - \alpha)^{-i-1} F(z).$$

Soit ensuite  $f$  donnée par une somme *finie* de la forme (1), c'est-à-dire une telle somme où les  $c_{\alpha i}$  non nuls sont en nombre fini. Il est clair alors que la somme  $S_{\alpha}(f)$  des termes relatifs à  $\alpha$ , dans  $S(f)$ , n'est autre que le résidu en  $z = \alpha$  de la fonction méromorphe  $F(z)^{-1} e^{zx} F_f(z)$ . Cela peut encore s'écrire comme suit:

$$S_{\alpha}(f) = \text{Res}_{z=\alpha} [F(z)^{-1} \int e^{z(x-y)} d\mu_f(y)] = g_{\alpha} * \mu_f,$$

où l'on a posé

$$g_{\alpha}(x) = \text{Res}_{z=\alpha} [F(z)^{-1} e^{zx}].$$

Il est clair que  $g_{\alpha}$  est combinaison linéaire des  $x^i e^{\alpha x}$  pour  $i < n(\alpha)$ , donc solution de  $g_{\alpha} * \mu = 0$ . Finalement <sup>1)</sup>, on a

$$S_{\alpha}(f) = f * \mu_{g_{\alpha}}.$$

On en déduit aussitôt, pour chaque  $c_{\alpha i}$ , une expression

$$c_{\alpha i} = K(f, P_{\alpha i}(x) e^{\alpha x}),$$

où  $P_{\alpha i}$  est un polynôme de degré  $< n(\alpha) - i$ .

<sup>1)</sup> La formule donnée par Delsarte ([33], formule (1) p. 444) est entachée d'une erreur qui provient d'une faute de calcul banale dans l'évaluation du résidu. Après correction, elle devient identique, en substance, à celle que nous donnons ci-dessus, et qui, sous cette forme, est due à L. Schwartz.

Pour toute solution  $f$  de  $f * \mu = 0$ , on conviendra alors de définir les  $c_{ai}$  par ces mêmes formules, et on notera  $S(f)$  la série (1) formée avec ces coefficients. Il est à remarquer (et Delsarte ne manque pas d'insister sur ce point) que les  $c_{ai}$  ne dépendent que des valeurs de  $f(x)$  pour  $a - x \in I$ , donc (puisque  $a$  est arbitraire) dans un intervalle quelconque de longueur  $l(I)$  égale à celle de  $I$ .

Avec ces résultats, on est à pied d'œuvre; il s'agit de savoir si, sous des conditions convenables et en un sens convenable,  $S(f)$  converge vers  $f$ ; s'il en est ainsi, on en conclura que  $S(f)$  détermine  $f$  d'une manière unique, de sorte que  $f$  est bien déterminée par ses valeurs dans un intervalle de longueur  $l(I)$ , comme c'est le cas pour les fonctions périodiques.

L'expression de  $S(f)$  par une somme de résidus a été suggérée à Delsarte par une démonstration de Cauchy, exposée par E. Picard dans son *Traité d'Analyse* (tome II, Chap. VI, § II); s'inspirant de celle-ci, Delsarte fait la sommation de  $S(f)$  par le « calcul des résidus », c'est-à-dire au moyen du théorème de Cauchy. Une analyse, d'ailleurs délicate (et qui, sur quelques points, demanderait sans doute à être revue) l'amène à conclure qu'il y a convergence, uniforme dans tout intervalle de continuité de  $f$ , sous les conditions suivantes: a)  $\mu$  est définie par une densité  $K$ , c'est-à-dire qu'on a, dans  $I$ ,  $d\mu(x) = K(x) dx$ ; b)  $K$  est absolument continue dans  $I$ , et  $\neq 0$  aux extrémités de  $I$ ; c)  $f$  est à variation bornée dans tout intervalle borné.

Dans le même travail ([33], Chap. I), Delsarte s'occupe aussi de résoudre l'équation avec second membre  $f * \mu = \varphi$ , où  $\mu$  est comme plus haut et  $\varphi$  est donnée. Ici, c'est sur la théorie des équations aux différences finies qu'il prend modèle. Il est amené ainsi, entre autre, à une généralisation étendue de la formule classique d'Euler-Maclaurin, reposant sur l'introduction de « polynômes bernoulliens » (à une ou plusieurs variables); pour le cas d'une variable, par exemple, ce sont les polynômes  $B_n(x)$  définis par la formule

$$F(z)^{-1} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) z^n,$$

où  $F$  est comme ci-dessus, et où on a supposé  $F(0) \neq 0$ .

Dès lors, Delsarte envisageait l'extension à plusieurs variables de la théorie ci-dessus, qui offre des difficultés incomparablement plus grandes. En effet, si  $\mu$  est une distribution et par exemple une mesure à support compact dans  $\mathbf{R}^n$ , son indicatrice  $F$  sera donnée, pour  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , par la formule

$$F(z) = \int \exp \left( - \sum_v z_v x_v \right) d\mu(x).$$

Les zéros de  $F$  forment un ensemble analytique de codimension 1 dans  $\mathbb{C}^n$ ; pour avoir un « spectre » discret, il faut se donner  $n$  mesures  $\mu_v$  telles que l'ensemble des zéros communs à leurs indicatrices  $F_v$  (le « spectre ») soit discret; pour simplifier, on admettra en premier lieu que ces zéros sont simples, c'est-à-dire qu'en chacun d'eux le jacobien des  $F_v$  est  $\neq 0$ . Heuristiquement, on cherchera alors à associer, à toute solution commune des équations  $f * \mu_v = 0$  une série

$$S(f) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \exp \left( \sum_v \alpha_v x_v \right),$$

où les  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sont les points du spectre. Dans son cours de Bombay de 1959 ([65]) et dans son mémoire de 1960 ([63]), Delsarte donne la solution formelle de ce problème au moyen des « déterminants de Jacobi »; comme pour  $n = 1$ , les termes  $S_{\alpha}(f)$  de la série  $S(f)$  peuvent s'écrire comme les résidus aux points  $z = \alpha$  d'une fonction méromorphe attachée à  $f$ . Ensuite il s'attache principalement au cas où  $n = 2$  et où  $\mu_1, \mu_2$  sont sommes de mesures définies par des densités continues et suffisamment différentiables dans le carré  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  et de masses ponctuelles placées aux sommets du carré. Dans ces conditions, il montre entre autres que, si  $f$  est continue, et  $\varphi$  indéfiniment différentiable à support compact, la série

$$S(f * \varphi) = S(f) * \varphi = \sum \Phi(\alpha) c_{\alpha} \exp(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

(où  $\Phi$  est l'indicatrice de  $\varphi$ ) converge vers  $f * \varphi$ , uniformément sur tout compact. On reconnaît là une idée introduite par L. Schwartz dans le cas  $n = 1$ , et qui elle-même est apparentée à l'idée fondamentale de Riemann dans sa théorie des séries trigonométriques. Dans le cas traité par Delsarte, la démonstration repose sur d'assez laborieux passages à la limite à partir de mesures sommes finies de masses ponctuelles. On en conclut que  $f$  est déterminée par  $S(f)$  d'une manière unique, et on peut en tirer aussi un procédé de « sommation » de la série formelle  $S(f)$ .

Mais c'est vers une autre généralisation, de portée encore plus vaste, que Delsarte se tourne en 1935; il semble y être parvenu comme suit. Dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n > 1$ , reprenons le problème des fonctions moyenne-périodiques, mais en y ajoutant une condition de symétrie sphérique; autrement dit, on s'assujettit à ne considérer que des fonctions, mesures et distributions invariantes par le groupe des rotations autour de 0. De

telles mesures (ou distributions), supposées toujours à support compact, forment évidemment une algèbre commutative pour la convolution; celle-ci, en un sens évident, peut être considérée comme engendrée, soit par les « mesures élémentaires »  $\mu_r$  formées, pour tout  $r \geq 0$ , par la masse totale 1 uniformément répartie sur la sphère de rayon  $r$  et de centre 0, soit par l'opérateur infinitésimal  $\Delta = \sum \partial^2 / \partial x_v^2$ . Appliquons donc les opérateurs  $f \rightarrow f * \mu_r$ ,  $f \rightarrow \Delta f$  à une fonction  $f$  à symétrie sphérique; si on écrit celle-ci  $f(\rho)$  avec  $\rho = (\sum x_v^2)^{1/2}$ , on obtient les opérateurs  $T^r$ ,  $D$  donnés par

$$(2) \quad (T^r f)(\rho) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi f((\rho^2 - 2r\rho \cos \varphi + r^2)^{1/2}) (\sin \varphi)^{n-2} d\varphi,$$

$$(3) \quad (Df)(\rho) = \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{df}{d\rho}.$$

Leurs fonctions propres peuvent s'obtenir à partir des exponentielles  $\exp(\sum \alpha_v x_v)$  en prenant la moyenne sphérique de celles-ci autour de 0 et écrivant les fonctions obtenues sous la forme  $j(\rho)$ . On trouve ainsi les fonctions

$$j_\lambda(\rho) = \Gamma(p+1) \left(\frac{\lambda\rho}{2}\right)^{-p} J_p(\lambda\rho),$$

où l'on a posé

$$\lambda = (-\sum \alpha_v^2)^{1/2}, \quad p = \frac{n}{2} - 1,$$

et où  $J_p$  est la fonction de Bessel d'ordre  $p$ ; et l'on a

$$(T^r j_\lambda)(\rho) = j_\lambda(r) j_\lambda(\rho), \quad D j_\lambda = -\lambda^2 j_\lambda.$$

On tire de là le développement formel

$$T^r = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r) D^n,$$

où les  $\varphi_n$  sont les coefficients du développement

$$j_\lambda(r) = \sum \varphi_n(r) (-\lambda^2)^n,$$

ou, plus explicitement:



$$\varphi_n(r) = \frac{\Gamma(p+1)}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}.$$

On est ainsi naturellement conduit à étudier, de ce point de vue nouveau, les fonctions moyenne-périodiques, les fonctions presque périodiques, etc. Cependant Delsarte ne s'y arrête pas, car il s'aperçoit aussitôt que les opérateurs  $T^r$  et  $D$  définis par (2) et (3) conservent leurs propriétés essentielles même quand  $n$  n'est pas supposé entier; cette observation fondamentale forme le point de départ d'une série de très importants travaux ([34]-[38], [42]-[52]). Il commence par axiomatiser entièrement les propriétés en question (dans [34], [36], [38], [47]) et part de là pour en élucider tout le mécanisme formel. C'est ensuite seulement qu'il revient aux opérateurs  $T^r$ ,  $D$  donnés par (2) et (3), mais avec la seule restriction  $\operatorname{Re}(p) > -1/2$  le plus souvent, ou éventuellement  $-1/2 < \operatorname{Re}(p) < 1/2$ , pour en faire le banc d'essai de sa méthode et en faire l'étude détaillée; comme l'a observé Lions plus tard, certains résultats s'étendent même à  $\operatorname{Re}(p) \leq -1/2$  par prolongement analytique. Dans ce cadre, il traite entre autres la théorie des fonctions presque périodiques, pour lesquelles les fonctions  $j_\lambda$ , avec  $\lambda$  réel, jouent le même rôle que les exponentielles  $e^{i\lambda x}$  dans la théorie de Bohr. Combinant ces idées avec celles qu'il avait introduites à propos des fonctions moyenne-périodiques, il retrouve la plupart des développements classiques en fonctions de Bessel (séries « de Fourier-Bessel », « de Bessel-Dini », « de Schlömilch »), ainsi que les développements, limités ou non, qui généralisent la formule de Taylor (avec ou sans reste) et la formule d'Euler-Maclaurin.

C'est encore au cours des mêmes recherches que Delsarte fait la découverte des « opérateurs de transmutation » auxquels son nom reste attaché. Dans la théorie formelle des opérateurs  $T^x$ ,  $D$  (où  $D$ , comme il a été indiqué, joue le rôle d'une transformation infinitésimale, et les  $T^x$  celui de translations généralisées), il était apparu qu'on pouvait définir les  $T^x$  en résolvant des problèmes aux limites relatifs à l'équation

$$D_x F(x, y) = D_y F(x, y);$$

ce mode de définition des  $T^x$  met en évidence qu'ils commutent avec  $D$ . La même idée, appliquée à deux opérateurs  $D$ ,  $D'$  distincts, et à l'équation

$$D_x F(x, y) = D'_y F(x, y)$$

conduit alors à des opérateurs, dits « de transmutation », qui transforment  $D$  en  $D'$ . C'est ce qui apparaît d'abord dans [51] pour l'opérateur  $D$



défini par (3), avec  $n = 2p + 2$ ,  $-1/2 < \operatorname{Re}(p) < 1/2$ , et  $D' = d^2/dt^2$ ; grâce à la « transmutation » de  $D$  en  $D'$ , on peut, formellement du moins (quitte à justifier en détail les conclusions qu'on en tire) appliquer à  $D$ , par simple transport de structure, tout ce qu'on sait de  $D'$ . La même idée est énoncée dans [50] pour des opérateurs différentiels très généraux du second ordre à une variable; elle est plus amplement exposée, à la suite d'un travail de Lions, dans le cours de Delsarte à Bombay en 1959 ([67]). Elle a été étendue au domaine complexe (et alors pour les opérateurs d'ordre quelconque) par Delsarte lui-même, en collaboration avec Lions ([58]-[59]); elle joue un rôle important dans les travaux de Lions, de B. M. Levitan et d'autres auteurs, en particulier sur le problème de Sturm-Liouville. Sur ces questions, on consultera aussi le bel article de Levitan dont la traduction est reproduite plus loin (tome II).

Les mêmes idées sont à la base du « théorème des deux rayons » et de ses généralisations ([60]-[61] et [65]). Soit de nouveau  $\mu_r$  la masse totale 1 uniformément répartie sur la sphère de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Le théorème en question dit que, si une fonction  $f$  indéfiniment différentiable dans  $\mathbf{R}^n$  satisfait à

$$f = f * \mu_a = f * \mu_b$$

avec  $a > b > 0$ , elle est harmonique (sauf tout au plus pour certaines valeurs exceptionnelles de  $a/b$ , en nombre fini quand  $n$  est donné). Si on pose  $u(x, \rho) = (f * \mu_\rho)(x)$  pour  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\rho \geq 0$ , alors  $u$  est solution d'un problème de Cauchy hyperbolique  $\Delta_x u = Du$ , où  $\Delta_x$  est le laplacien dans  $\mathbf{R}^n$  et  $D$  est défini par (3); les données aux limites sont  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $(\partial u / \partial \rho)(x, 0) = 0$ . On peut alors remplacer  $\Delta_x$  par n'importe quel opérateur elliptique dans  $\mathbf{R}^n$ , et  $D$  par un opérateur du second ordre, à une variable, qui se laisse transformer en  $d^2/dt^2$  par une transmutation. C'est même dans un cadre encore plus général que se placent Delsarte et Lions dans [61]; le point essentiel consiste à ramener l'hypothèse initiale à une hypothèse de moyenne-périodicité (à une variable, mais à inconnue vectorielle), après quoi la démonstration s'achève sans difficulté.

Une autre possibilité de généralisation des formules (2) et (3) apparaît lorsqu'à  $\mathbf{R}^n$  et au groupe des rotations on substitue un autre groupe de Lie  $G$  et un groupe compact  $A$  d'automorphismes de  $G$ . C'est là le point de vue qu'adopte Delsarte dans ses communications aux colloques de Louvain en 1953 ([56]) et de Nancy en 1956 ([57]); dans la première, il prend  $G = \mathbf{C}^n$ ; dans l'autre,  $G$  n'est plus supposé commutatif. Il obtient ainsi d'importantes généralisations des fonctions de Bessel, des équations

différentielles auxquelles elles satisfont, et de leurs théorèmes d'addition intégraux. Il est à noter aussi que [56] pose d'intéressantes questions relatives aux invariants des groupes linéaires (sur l'une de ces questions, Delsarte devait revenir brièvement dans la note [66]) (cf. [In. 10]). On y trouve également un critère (nouveau, semble-t-il, malgré sa simplicité) pour qu'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, en une fonction inconnue de  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , n'admette qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes: il suffit pour cela que, pour tout  $i$ , l'idéal différentiel engendré par les premiers membres contienne un opérateur différentiel où ne figure aucun des  $\partial/\partial x_j$  pour  $j \neq i$ . Il est vrai que ce critère ne semble pas d'application aisée, même dans le problème en vue duquel Delsarte l'introduit; de plus, il n'implique aucun procédé de calcul effectif pour la dimension de l'espace des solutions; ce calcul pose un problème algébrique dont on s'étonne qu'il n'ait pas encore attiré l'attention. D'autre part, dans [57], Delsarte pose, et résout en partie, le problème de l'engendrement du quotient  $G/A$  (ou, comme dit Delsarte, de l'« hypergroupe » qu'il définit) par ses « transformations infinitésimales », donc par des opérateurs différentiels; déjà dans le cas où  $A$  est le groupe des rotations dans  $G = \mathbf{R}^n$ , on a vu plus haut que la « transformation infinitésimale »  $D$  est du second ordre. Il s'agit donc de généraliser à  $G/A$  les théorèmes fondamentaux de la théorie de Lie; c'est sur le « premier théorème » que Delsarte concentre son attention (cf. déjà [52]). Comme dans le cas de la transmutation des opérateurs à une variable, on aboutit à des équations aux dérivées partielles à variables séparées;  $A$  étant supposé compact, on peut les résoudre par des intégrales prises sur  $A$ . D'ailleurs le même formalisme subsiste quand  $A$  n'est pas compact, et Delsarte indique plusieurs exemples remarquables où le problème peut être traité complètement. Dans le premier de ces exemples,  $G$  est  $GL(2, \mathbf{C})$  et  $A$  est le groupe des automorphismes intérieurs de  $G$ ; l'algèbre d'opérateurs, ou, pour parler comme Delsarte, l'« hypergroupe » correspondant est celui qui est engendré par le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie, opérant sur les fonctions sur  $G$  invariantes par  $A$ . Delsarte touchait donc ici à un point crucial de la théorie des représentations de degré infini des groupes de Lie, à savoir, les relations entre le centre de l'algèbre enveloppante et les opérateurs définis par l'intégration sur les classes d'éléments conjugués dans  $G$ ; ce point n'a commencé à être mis en évidence qu'assez récemment, et il y aurait lieu d'examiner si les idées de Delsarte ne sont pas de nature à jeter un jour nouveau sur une théorie qui, malgré de brillants succès, n'a sûrement pas encore pris figure définitive. Sur le problème général de l'engendrement

d'un « hypergroupe » par ses opérateurs infinitésimaux, on consultera aussi l'article déjà cité de B. M. Levitan, qui à la suite de [57], a pu obtenir, dans ce cadre, les analogues des trois théorèmes de Lie. Ici comme ailleurs, Delsarte s'est contenté de faire œuvre de pionnier loin des sentiers battus, laissant à d'autres le soin d'une exploration plus approfondie.

C'est à l'ensemble des recherches ci-dessus qu'il faut rattacher enfin un travail inédit ([In. 8]) sur les problèmes spectraux, qui montre à quel point Delsarte est resté préoccupé toute sa vie par l'aspect formel ou algébrique des développements en série. Dans une première partie (« Note A »), il reprend le problème des fonctions moyenne-périodiques sur  $\mathbf{R}$ , mais en substituant à  $d/dx$  un opérateur différentiel linéaire quelconque  $D$ , d'ordre  $m$ , puis en se donnant  $m$  distributions  $\mu_1, \dots, \mu_m$  à support compact; le spectre est ici l'ensemble des  $\alpha \in \mathbf{C}$  pour lesquels les équations  $\mu_1(f) = 0, \dots, \mu_m(f) = 0, Df = \alpha f$  ont une solution  $f_\alpha \neq 0$ ; c'est encore l'ensemble des zéros d'une fonction entière  $A(z)$ . Supposant pour simplifier que  $A$  est à zéros simples, et supposant qu'une fonction  $g$  admet un développement formel  $S(g) = \sum c_\alpha f_\alpha$ , Delsarte obtient des formules explicites pour les termes  $g_\alpha = c_\alpha f_\alpha$  de  $S(g)$ , formules qui sont donc valables tout au moins chaque fois que les  $c_\alpha$  non nuls sont en nombre fini. Tout comme dans le cas des fonctions moyenne-périodiques, ces termes se présentent comme les résidus d'une fonction méromorphe en  $z$ ,  $A(z)^{-1} B(z, x)$ . Dans une deuxième partie (« Note B »), Delsarte combine ces idées avec celles de sa conférence de Louvain ([56]) pour donner une solution partielle du problème analogue dans le cas de  $n$  variables.

C'est avant tout par son œuvre d'analyste, telle que nous avons tenté (bien sommairement et incomplètement) de la décrire ci-dessus, que Delsarte s'imposera à l'historien des mathématiques de notre époque. Mais il s'est aussi, pendant de longues années, vivement intéressé à la théorie des nombres, et y a apporté en tout cas des aperçus et des points de vue originaux; sa note de 1942 ([53]) fait la transition d'un domaine à l'autre. Il avait dû être frappé par la structure formelle de la célèbre formule de Hardy <sup>1)</sup> exprimant le nombre de points de  $\mathbf{Z}^2$  dans le cercle  $x^2 + y^2 < r^2$  au moyen de fonctions de Bessel; l'apparition de celles-ci ne pouvait manquer de lui rappeler ses propres recherches sur les fonctions moyenne-périodiques à symétrie sphérique. Dans la note [53], il s'agit d'étendre la formule de Hardy à un groupe fuchsien  $g$  opérant dans le demi-plan de Poincaré, pour obtenir le nombre des transformés par  $g$  d'un point donné, contenus

<sup>1)</sup> Sur cette formule (dite aussi « de Hardy-Landau ») et son histoire, cf. par exemple G. H. HARDY, *Collected Papers*, vol. II, p. 330.

dans un cercle (non-euclidien) donné. D'une manière un peu plus générale, dans un manuscrit inédit ([In. 4]) dont on trouvera la partie essentielle au Tome II, Delsarte considère un groupe proprement discontinu  $g$ , opérant sur une surface  $\Sigma$  à courbure constante  $\kappa = \pm 1/a^2$  qui est, soit le plan si  $\kappa = 0$  (donc si  $a = \infty$ ), soit la sphère si  $\kappa > 0$ , soit le demi-plan de Poincaré si  $\kappa < 0$ ; il est supposé implicitement que  $\Sigma/g$  est compact. Soient  $A$  et  $M$  deux points de  $\Sigma$ ; il s'agit d'étudier le nombre  $\mathfrak{A}(x, A, M)$  d'éléments  $s$  de  $g$  tels que  $sA$  soit dans le cercle (non-euclidien) de centre  $M$  et d'aire (non-euclidienne)  $\pi x$ . Soit  $\Delta$  l'opérateur de Beltrami sur  $\Sigma$ ; comme il est bien connu, on peut choisir sur  $\Sigma/g$  un système orthonormal complet formé de fonctions propres de  $\Delta$ , ou, ce qui revient au même, de fonctions propres  $\varphi_n$  de  $\Delta$  sur  $\Sigma$ , invariantes par  $g$ ; soient  $\lambda_n$  les valeurs propres correspondantes; on peut prendre  $\lambda_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \sigma^{-1/2}$ , où  $\sigma$  est l'aire de  $\Sigma/g$ . Dans ces conditions, Delsarte se propose de calculer le développement de  $\mathfrak{A}(x, A, M)$ , considéré comme fonction de  $M$  invariante par  $g$ , suivant le système  $(\varphi_n)$ ; une analyse fort ingénieuse lui permet, formellement tout au moins, d'obtenir ce développement sous la forme

$$(4) \quad \mathfrak{A}(x, A, M) = \frac{\pi x}{\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \varphi_n(A) \varphi_n(M),$$

où les coefficients  $c_n(x)$  sont donnés par des fonctions hypergéométriques si  $\kappa \neq 0$ , et à la limite, si  $\kappa = 0$ , par des fonctions de Bessel, conformément à la formule de Hardy-Landau. Par exemple, pour  $\kappa = -1/a^2$ , on a:

$$c_n(x) = F(\alpha_n, \beta_n; 2; -x/4a^2),$$

où  $\alpha_n, \beta_n$  sont les racines de  $X^2 - X - \lambda_n a^2 = 0$ . Il ne semble pas que Delsarte ait poussé plus loin dans cette voie, qui semblait pourtant pleine de promesses. Quelques calculs qui suivent son manuscrit (et qu'on n'a pas cru devoir reproduire dans cette édition) indiquent seulement qu'il s'était du moins assuré de la convergence absolue de la série qui forme le seconde membre de la formule (4).

Ensuite nous le voyons chercher un point de jonction entre l'arithmétique et les fonctions presque périodiques, et se demander dans quels cas une fonction arithmétique  $f(n)$  peut être presque périodique, au sens de Bohr ou en un sens plus général. Si elle l'est, cela veut dire qu'elle admet, formellement du moins, un développement en série suivant les exponentielles  $\chi_r(n) = e^{2\pi i r n}$ , où  $r \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , c'est-à-dire suivant les caractères de  $\mathbf{Z}$ . Si on écrit  $f \sim \sum a_r \chi_r$ , la théorie de Bohr suggère de prendre pour  $a_r$  la valeur moyenne

$$M[f\bar{\chi}_r] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \bar{\chi}_r(n),$$

à supposer qu'elle existe. Essayant d'abord d'appliquer cette idée aux fonctions arithmétiques élémentaires classiques, Delsarte constate que, pour celles-ci,  $a_r$  dépend seulement de l'ordre du caractère  $\chi_r$ , c'est-à-dire de  $q$  si l'on écrit  $r = m/q$  avec  $(m, q) = 1$ . On posera donc

$$c_q(n) = \sum_m \chi_{m/q}(n) = \sum_m e^{2\pi i mn/q},$$

où la sommation s'étend à un système complet de restes  $m$  premiers à  $q$  modulo  $q$ ; et on écrira  $a_q$  au lieu de  $a_r$ , pour  $r = m/q$  comme plus haut. Groupant ensemble, dans la série formelle pour  $f$ , les termes relatifs aux caractères de même ordre, on obtient une série formelle  $\sum a_q c_q(n)$ . C'est ainsi que, dans son mémoire de 1945 ([54]), Delsarte commence par retrouver <sup>1)</sup> des résultats classiques de Ramanujan, pour les étendre ensuite dans diverses directions, et en particulier aux corps de nombres algébriques. En ce qui concerne ceux-ci, on peut, en langage moderne, présenter les choses comme suit. Soit  $f(q)$  une fonction d'un idéal entier  $q \neq (0)$  du corps  $k$ ; soient  $k_p$  les complétions  $p$ -adiques de  $k$ ; soit  $r_p$  l'anneau des entiers de  $k_p$ ; soit  $a = (a_p)$  un élément de  $\Omega = \prod r_p$  (un « idèle entier fini ») tel que, pour tout  $p$ ,  $v_p(a_p)$  soit égal à l'exposant de  $p$  dans  $q$ ; chaque fois qu'il en est ainsi, soit  $f(a) = f(q)$ . Dans ces conditions, il s'agit de savoir si  $f(a)$  peut être prolongée d'une manière naturelle (en particulier par continuité, ce qui correspond au cas des fonctions presque périodiques au sens de Bohr) à une fonction  $F$  sur le groupe additif de  $\Omega$ ; lorsqu'il en est ainsi, on peut lui faire correspondre la série de Fourier  $\sum a_\chi \chi$  de  $F$  sur  $\Omega$ , les  $\chi$  étant les caractères de  $\Omega$ . D'ailleurs  $\Omega$  est limite projective des anneaux  $r/a$ , où  $r$  est l'anneau des entiers de  $k$  et où  $a$  décrit l'ensemble des idéaux  $\neq (0)$  de  $r$ . Les  $\chi$  s'identifient donc aux caractères de ceux-ci. De plus, pour  $a$  donné, tous les caractères « primitifs » de  $r/a$  (c'est-à-dire ceux qui ne peuvent être définis modulo un diviseur strict de  $a$ ) se déduisent les uns des autres par les automorphismes  $\xi \rightarrow \lambda \xi$  du groupe additif  $r/a$ , quand on prend pour  $\lambda$  les éléments inversibles de l'anneau  $r/a$ ; on en conclut

<sup>1)</sup> C'est seulement à Princeton en 1947, semble-t-il, que Delsarte prit connaissance des travaux de Ramanujan (S. RAMANUJAN, *Collected Papers*, Cambridge 1927; voir en particulier n° XXI, p. 179) et du livre de Hardy (G. H. HARDY, *Ramanujan*, Cambridge 1940; voir en particulier Chap. IX, pp. 137-141). Dans [54], le nom de Ramanujan n'est pas cité, et Delsarte note  $\Phi(q | n)$ , et baptise « indicateur d'ordre  $n$  », la somme de Ramanujan  $c_q(n)$ .



qu'ils ont même coefficient dans  $\sum a_\chi \chi$ . Cela conduit à regrouper dans cette série les termes correspondants et à l'écrire sous la forme

$$\sum a(\alpha) c(\alpha; q),$$

où la « somme de Ramanujan »  $c(\alpha; q)$  est la somme des  $\chi(\alpha)$  étendue aux  $\chi$  primitifs modulo  $\alpha$ .

Par la suite, Delsarte n'a plus publié sur la théorie des nombres qu'un seul travail assez court ([55]); là il s'agit d'étendre aux groupes abéliens finis la formule classique de Möbius. On considère donc des fonctions  $G \rightarrow f(G)$  définies sur l'ensemble des groupes abéliens finis, telles que  $f(G) = f(G')$  chaque fois que  $G, G'$  sont isomorphes; on se propose de définir une telle fonction  $\mu$  ayant la propriété suivante: pour tout couple de telles fonctions  $f, F$ , les relations

$$F(G) = \sum f(G'), \quad f(G) = \sum F(G') \mu(G/G'),$$

où les sommes sont étendues à tous les sous-groupes  $G'$  de  $G$ , sont équivalentes. Delsarte démontre l'existence et l'unicité de  $\mu$  (qui bien entendu, pour les groupes cycliques, n'est autre que la fonction de Möbius classique) et l'applique à divers problèmes énumératifs.

Par la suite, comme le montrent ses notes inédites (voir en particulier [In. 6]), Delsarte s'est plus spécialement intéressé à la théorie des « séries singulières » de Hardy et Littlewood. Ces derniers attachaient à toute fonction arithmétique  $f(n)$  la « série génératrice »  $\Phi(z) = \sum f(n) z^n$ ; puis, supposant le rayon de convergence égal à 1, ils déterminaient le comportement de  $\Phi$  aux points  $z = e^{2\pi i r}$ , avec  $r \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , c'est-à-dire aux racines de l'unité. Supposons qu'en chacun de ces points  $\Phi(z)$  ait pour partie principale une fraction rationnelle  $\varphi_r(z)$  ayant ce point pour seul pôle; on peut alors espérer représenter approximativement  $\Phi(z)$  par la série  $\sum \varphi_r(z)$ . Comme Hardy et Littlewood l'avaient observé, un cas particulièrement important est celui où  $\Phi(e^{2\pi i \tau})$  est une forme modulaire dans le demi-plan  $\text{Im}(\tau) > 0$ ; il en est ainsi par exemple lorsque  $f(n)$  est le nombre des représentations de  $n$  par une forme quadratique positive;  $\sum \varphi_r(e^{2\pi i \tau})$  est alors la série d'Eisenstein de même degré, dont  $\Phi(e^{2\pi i \tau})$  ne diffère que par une « forme parabolique », ce qui explique en ce cas le succès de la méthode et en précise la portée; il n'est pas besoin de dire qu'on ne connaît encore aucune raison du même genre pour son succès dans le problème de Waring. Delsarte, lui, préfère adopter le point de vue de la théorie des fonctions presque périodiques. Considérons par exemple le nombre de représentations de l'entier  $n > 0$  par une forme  $F$  de degré  $k$  à  $s$  variables, à coefficients entiers,

c'est-à-dire le nombre de solutions dans  $\mathbf{Z}^s$  de l'équation  $F(x) = n$ . Ce nombre n'étant pas fini en général, il convient d'adjoindre à cette équation des inégalités (homogènes) convenables, ou, ce qui revient au même, d'astreindre  $x$  à se trouver dans un cône donné  $\Gamma$  de sommet 0; on supposera que l'ensemble

$$V = \{x \in \Gamma \mid 0 \leq F(x) \leq 1\}$$

est borné; soit  $\Omega$  son volume. On désignera par  $R(n)$  le nombre de solutions de  $F(x) = n$  dans  $\mathbf{Z}^s \cap \Gamma$ . Soit encore  $E(N)$  l'ensemble

$$E(N) = \{x \in \mathbf{Z}^s \cap \Gamma \mid 0 < F(x) \leq N\}.$$

Le nombre de points de  $E(N)$ , qui n'est autre que  $R(1) + \dots + R(N)$ , est évidemment  $\sim \Omega N^{s/k}$  pour  $N \rightarrow +\infty$ ; on peut donc dire que l'« ordre de grandeur moyen » de  $R(N)$  est  $N^\alpha$  avec  $\alpha = \frac{s}{k} - 1$ . Cela conduit à poser  $r(n) = n^{-\alpha} R(n)$ .

Delsarte observe alors que non seulement  $r(n)$  mais encore  $r(n)\chi(n)$  a une valeur moyenne sur l'ensemble des entiers  $n > 0$ , quel que soit le caractère  $\chi$  de  $\mathbf{Z}$ ; si  $a_\chi$  est cette valeur moyenne, on pourra donc formellement associer à  $r(n)$  la série  $\sum a_\chi \bar{\chi}(n)$ . Soit en effet  $q$  l'ordre de  $\chi$ , de sorte qu'on aura  $\chi(n) = \rho^n$ ,  $\rho$  étant une racine primitive  $q$ -ième de 1. On aura

$$N^{-1} \sum_{n=1}^N r(n) \chi(n) = N^{-1} \sum_{x \in E(N)} F(x)^{-\alpha} \chi[F(x)].$$

Pour  $a \in \mathbf{Z}^s$ , soit  $E(N, a)$  l'ensemble des  $x \in E(N)$  tels que  $x \equiv a \pmod{q}$ ; le second membre s'écrit aussi

$$N^{-1} \sum_{\alpha} \chi[F(a)] \sum_{x \in E(N, a)} F(x)^{-\alpha},$$

où la première somme est étendue à un système complet de restes modulo  $q$  dans  $\mathbf{Z}^s$ . Mais on a, pour  $N \rightarrow +\infty$ :

$$\sum_{x \in E(N, a)} F(x)^{-\alpha} \sim Nq^{-s} \int_V F(y)^{-\alpha} dy = Nq^{-s} \frac{s}{k} \Omega;$$

c'est dans l'application de ce principe, qui remonte à Gauss, que consiste le point essentiel de ce que Delsarte nomme la « *méthode volumétrique* »; pour  $\alpha > 0$ , il a besoin d'une justification, d'ailleurs facile. Les valeurs moyennes  $a_\chi$  sont donc bien définies et données par



$$a_\chi = \frac{s}{k} \Omega q^{-s} S_\chi,$$

où  $S_\chi$  est la « somme de Gauss »

$$S_\chi = \sum_a \chi [F(a)].$$

Les  $S_\chi$  sont liés d'une manière évidente aux nombres de solutions des congruences  $F(x) \equiv n \pmod{q}$ .

On est ainsi conduit à écrire symboliquement

$$r(n) \sim \frac{s}{k} \Omega \sum_\chi q^{-s} S_\chi \bar{\chi}(n),$$

où la série est la « série singulière »; elle ne dépend pas du cône  $\Gamma$ , qui n'intervient que par le coefficient  $\Omega$ .

Si  $\chi, \Psi$  sont les caractères d'ordres premiers entre eux, il est immédiat que  $S_{\chi\Psi} = S_\chi S_\Psi$ . La série singulière peut donc (formellement encore) s'écrire comme produit infini  $\prod T_p(n)$ , étendu aux nombres premiers  $p$ , des séries partielles

$$T_p(n) = \sum_\chi q^{-s} S_\chi \bar{\chi}(n)$$

où cette fois la sommation est étendue aux seuls caractères  $\chi$  dont l'ordre  $q$  est une puissance de  $p$ . Si l'on identifie ceux-ci aux caractères de l'anneau  $\mathbf{Z}_p$  des entiers  $p$ -adiques, on peut encore écrire  $T_p(n)$  sous la forme

$$T_p(n) = \sum_\chi \int \chi [F(x) - n] dx,$$

où la somme est étendue aux caractères de  $\mathbf{Z}_p$ , et où l'intégrale est prise sur  $(\mathbf{Z}_p)^s$ .

Pour aller plus loin, supposons avec Delsarte que l'hypersurface  $F(x) = 0$ , dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^{s-1}$ , soit sans point singulier. Alors, pour tout  $x \neq 0$ , il y a  $i$  tel que  $\partial F / \partial x_i \neq 0$ ; par suite, pour presque tout  $p$ , il en est de même après réduction modulo  $p$ . Pour un tel  $p$ , soit  $\chi$  d'ordre  $q = p^t$  avec  $t > 1$ ; pour  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , la somme  $\sum \chi [F(a')]$ , étendue aux  $a' \equiv a \pmod{p^{t-1}}$ , est 0. Donc  $S_\chi$  n'est autre alors que  $p^{s(t-1)}$  si  $k \geq t \geq 2$ , et  $p^{s(k-1)} S_\Psi$  avec  $\Psi(n) = \chi(p^k n)$  si  $t > k$ . On tire de là, par récurrence

$$q^{-s} S_\chi = p^{-s(m+1)} \quad \text{si} \quad mk + 2 \leq t \leq (m+1)k,$$

$$q^{-s} S_\chi = p^{-s(m+1)} S_\omega \quad \text{si} \quad t = mk + 1 \quad \text{et} \quad \omega(n) = \chi(p^{mk} n).$$

En particulier, les  $S_\chi$  sont complètement déterminés par ceux pour lesquels  $\chi$  est d'ordre  $p$ , ou, ce qui revient au même, par les nombres de solutions des congruences  $F(x) \equiv n \pmod{p}$ . Il s'ensuit aussi que  $T_p(n)$  est absolument convergente pour  $s > k$ .

Bien entendu, Delsarte n'ignorait pas que, dans l'évaluation de  $r(n)$  et de  $R(n)$ , la construction de la série singulière n'est qu'un premier pas, et non le plus délicat. Il s'agit ensuite de savoir dans quelle mesure on peut conclure du comportement de cette série à celui de  $r(n)$ . Hardy et Littlewood avaient introduit pour cela leur célèbre méthode des arcs « majeurs » et « mineurs ». D'après quelques notes fragmentaires, Delsarte aurait cherché une solution du même problème dans l'étude des séries de Dirichlet  $\sum R(n) \rho^n n^{-\sigma}$  et de leur comportement en  $\sigma = s/k$ , mais, semble-t-il, sans aboutir à rien de satisfaisant.

La question du nombre de solutions de  $F(x) \equiv n \pmod{p}$  s'étend tout naturellement aux corps finis. Les méthodes classiques, basées sur l'emploi des caractères et des sommes de Gauss, permettent de traiter le cas de l'équation  $\sum x_i^n = a$  qui apparaît dans le problème de Waring, et plus généralement de toute équation « diagonale »  $\sum_{i=1}^s a_i x_i^{n_i} = a$ . Pour  $s = 2$ , Hasse et Davenport, dès 1935, avaient tiré de là, au moyen de leur théorème sur les sommes de Gauss, la détermination complète de la fonction zêta de la courbe ainsi définie; comme l'observa Weil en 1949, ces résultats s'étendent sans difficulté à  $s > 2$ . Delsarte, qui reprit la question dans un exposé du séminaire Bourbaki ([In. 7]), fit voir de plus qu'on peut traiter de même toute équation de la forme  $\sum_i a_i M_i(x) = a$ , où les  $M_i(x) = \prod_j (x_j)^{n_{ij}}$  sont des monomes indépendants (autrement dit, tels qu'on ne puisse avoir identiquement  $\prod M_i(x)^{m_i} = 1$  que si les entiers  $m_i$  sont tous nuls).

La dernière publication de Delsarte ([67]) paraît lui avoir été inspirée par un travail de Kahane et Mandelbrojt. Comme il est bien connu, l'équation fonctionnelle de  $\zeta(s)$  résulte de celle de la fonction thêta, conséquence elle-même de la formule de Poisson; celle-ci peut s'interpréter en disant que la distribution sur  $\mathbf{R}$ , formée de masses 1 placées aux points de  $\mathbf{Z}$ , est sa propre transformée de Fourier. D'après les auteurs cités, ce résultat admet une sorte de réciproque; plus généralement, chaque fois qu'on a une équation fonctionnelle de type convenable entre deux séries de Dirichlet, on peut en conclure que deux distributions, sommes de masses ponctuelles sur  $\mathbf{R}$ , sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Delsarte fait voir

qu'on peut tirer des conséquences analogues de l'équation fonctionnelle de  $\zeta'(s)/\zeta(s)$ . Notons  $\rho = 1/2 + i\tau$  les zéros imaginaires de  $\zeta$ ; si l'on admet l'hypothèse de Riemann, les  $\tau$  sont réels, et les résultats de Delsarte peuvent s'interpréter comme suit: la distribution sur  $\mathbf{R}$ , somme de masses 1 aux points  $\tau$ , a pour transformée de Fourier la somme de masses ponctuelles placées aux points  $\log(p^n)$  et d'une distribution élémentaire, explicitement connue. Entre autres applications, Delsarte tire de sa formule le prolongement analytique de la fonction  $\sum \tau^{-s}$  comme fonction méromorphe dans tout le plan.

Dans la présente notice, nous avons essayé en quelque mesure de tenir compte des manuscrits inédits de Delsarte, dont un petit nombre seulement ont pu être retenus pour la publication. Mais, comme ses amis le savaient bien, son esprit abondait en idées originales qu'il n'a pas eu le temps ou surtout qu'il n'a pas eu l'occasion de développer et de faire aboutir. Nous nous contenterons d'en mentionner une seule. Il a toujours été vivement frappé du fait que les constantes de structure d'une algèbre de Lie de dimension donnée  $n$  forment les points d'un ensemble algébrique défini dans l'espace de dimension  $n^3$  par des équations à coefficients entiers. Il pensait que l'étude de cet ensemble, du point de vue de la géométrie algébrique, méritait d'être entreprise. Sur cet ensemble, le groupe linéaire  $GL(n)$  opère d'une manière évidente; les points, lorsqu'il en existe, qui correspondent à des algèbres semi-simples jouent sans doute un rôle privilégié. Visiblement cette idée est apparentée à la notion de « schéma en groupes », qui a fait l'objet de travaux récents. Elle n'est pas sans rapport non plus, sans doute, avec les réflexions de Delsarte, dans ses dernières années, sur la classification de Mendéléief, qu'il avait cherché à interpréter, semble-t-il, au moyen de structures d'algèbres semi-simples; parmi ses papiers se sont retrouvées sur ce sujet des ébauches dont on trouvera des extraits au Tome II de la présente édition. Les travaux réunis dans celle-ci suffiront amplement, en tout cas, à confirmer le renom de Delsarte comme l'un des meilleurs analystes et l'un des esprits les plus originaux parmi les mathématiciens de notre temps.