Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: III.1. Rappels

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

CHAPITRE III

BASES D'ENTIERS

III.1. RAPPELS

Bases d'entiers normales

Soit K une extension abélienne de Q. On dit qu'un élément θ de K engendre une base normale des entiers de K si l'anneau des entiers de K admet pour base, sur Z, l'ensemble des conjugués de θ.

Si K possède une base d'entiers normale, engendrée par θ, alors:

— Tout sous-corps L de K possède également une base d'entiers normale engendrée par $Tr_{K/L}(\theta)$.

En effet, tout entier x de L, s'écrit:

$x = \sum_{\sigma \in G(K/Q)} \lambda_\sigma \, \sigma(\theta)$, λ_σ appartenant à Z.

Puisque x est invariant par tout L-automorphisme de K, alors $\lambda_\sigma = \lambda_{\sigma'}$, pour tous σ et σ' situés dans la même classe modulo $G(K/L)$.

— La trace de θ sur Q est égale à ± 1.

En effet Z n'a pas d'autre base d'entiers que $\{1\}$ ou $\{-1\}$.

Corps cyclotomiques

ξ étant une racine primitive n^{eme} de 1, on notera $\Phi_n(X)$ le n^{eme} polynome cyclotomique, c'est-à-dire le polynome minimal de ξ sur Q. On rappelle qu'on a la relation: $X^n - 1 = \prod_{k|n} \Phi_k(X)$.

Si $n = p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$ est la décomposition de n en facteurs premiers, on a:

$$\Phi_n(X) = \Phi_{p_1 \dots p_m}\left(X^{p_1^{u_1 - 1} \dots p_m^{u_m - 1}}\right)$$

([6] chapitre 8).

III.2. BASES D'ENTIERS DANS LES CORPS CYCLOTOMIQUES

LEMME III.1.

Soit d un entier sans facteur carré et ξ une racine primitive d^{eme} de 1. On a alors $Tr_{\Omega(d)/Q}(\xi) = (-1)^m$, m étant le nombre de facteurs premiers de d.