II.2. Nombres premiers ramifiés dans une extension abélienne de Q

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

$$\delta_{K'/K} = \prod_{1 \leq v \leq m} \mathfrak{p}_v^{h_v}.$$

Si e_v est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}_v$ sur K on a: $h_v \geqq e_v - 1$ et $h_v = e_v - 1$ si et seulement si e_v est premier avec la caractéristique du corps $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$. Le discriminant de K' sur K est $N_{K'/K}(\delta_{K'/K})$ et on a la formule de transitivité: $\delta_{K''/K} = \delta_{K''/K'} \cdot \delta_{K'/K}$ ([2] chapitre 4, [5] chapitre 3).

Corps cyclotomiques: Dans un corps cyclotomique $\Omega(p^s)$, (p premier) p est leur seul nombre premier ramifié et: $p = (1-\xi)^{\varphi(p^s)}$, ξ désignant une racine primitive $(p^s)^{\text{eme}}$ de 1, est la décomposition de p en idéaux premiers de $\Omega(p^s)$.

p est ramifié dans un corps cyclotomique $\Omega(n)$ si et seulement si p divise n. Si n s'écrit: $n = p^s n'$ avec n' premier avec p, alors le corps d'inertie de p dans $\Omega(n)$ est $\Omega(n')$ et l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $\varphi(p^s)$. Si q est premier avec n, la classe de q modulo n est l'automorphisme de Frœbenius, et elle engendre dans $G(n)$ le groupe de décomposition de q dans $\Omega(n)$. Le degré résiduel de q dans $\Omega(n)$ est donc le plus petit entier f tel que: $q^f \equiv 1\ (n)$.

Si ξ est une racine primitive n^{eme} de 1, $\{1, \xi, \dots \xi^{\varphi(n)-1}\}$ est une base de l'anneau des entiers de $\Omega(n)$ sur Z. Le discriminant de $\Omega(n)$ sur Q est:

$$\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}$$

ce dernier produit étant étendu à tous les nombres premiers p divisant n ([5] chapitre 4).

II.2. Nombres premiers ramifiés dans une extension abélienne de Q

Lemme II.1.

> Soient K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K. Alors un nombre premier p se ramifie dans K si et seulement s'il divise n.

Si p est ramifié dans K, alors il est ramifié dans tout surcorps de K, donc dans $\Omega(n)$ et il divise n.

Réciproquement, si p divise n, posons $n = p^s n'$, avec n' premier avec p.

Alors le corps d'inertie de p dans $\Omega(n)$ est $\Omega(n')$ et son groupe d'inertie $T(n, n')$.

Soit π l'application canonique de $G(n)$ sur $G(^K/_Q)$ qui à tout automorphisme de $\Omega(n)$ fait correspondre sa restriction à K. π a pour noyau $G(^{\Omega(n)}/_K)$ et comme $\Omega(n)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant K, on a donc:

$$\Omega(n') \not\supseteq K \quad \text{c'est-à-dire} \quad T(n, n') \nsubseteq G(^{\Omega(n)}/_K) .$$

$\pi\big(T(n, n')\big)$ qui est le groupe d'inertie de p dans K, n'est donc pas réduit à l'identité et p se ramifie dans K.

II.3. Décomposition d'un nombre q premier, non ramifié dans K_r

K_r désigne une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier) et $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée. Les notations restent les mêmes qu'au premier chapitre. q est un nombre premier non ramifié dans K_r, c'est-à-dire d'après le lemme précédent, premier avec n_r.

Si p est impair et suivant que $u_r = 0$ ou $u_r \geqq 2$,

soit
$$q \equiv c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$
ou
$$q \equiv b_0^{\beta_0} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r) ,$$

la décomposition de q dans $G(n_r)$.

On posera alors:

— Si
$$2 \leqq u_r \leqq r : V(q) = \alpha_0\beta_0 + \sum_{2 \leq j \leq m_r} \alpha_j\beta_j - \beta_1$$

— Si
$$u_r = r + 1 : V(q) = \sum_{1 \leq j \leq m_r} \alpha_j\beta_j - \beta_0$$

— Si
$$u_r = 0 : V(q) = \sum_{2 \leq j \leq m_r} \alpha_j\beta_j - \beta_1$$

De même si $p = 2$ et suivant que $u_r = 0$, ou $u_r = 2$, ou $u_r \geqq 3$, soit

$$q \equiv c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r) \qquad \text{ou} \qquad q \equiv a_0^{\beta_0} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$

ou

$$q \equiv a_0^{\beta_0} a_0'^{\beta_0'} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$