

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	18 (1972)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS
<b>Autor:</b>	Oriat, Bernard
<b>Kapitel:</b>	II.1. Rappels
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-45361">https://doi.org/10.5169/seals-45361</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

D'autre part il est nécessaire que  $K_r$  soit réelle car:  $(-1)^2 = 1 \in S_r$ , implique, d'après le lemme I.1,  $-1 \in S_i$  pour tout  $i < r'$ . Donc tous les sous-corps stricts de  $K_r$  sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si  $u_r = 0$ ,  $-1$  se décompose dans les sous-groupes  $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$  de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A bis que si  $j \leq m_i$ , alors  $\frac{p_j-1}{2} \equiv 0 (2^{r-i+1})$

et compte tenu du lemme I.2 bis,  $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$ . Donc  $-1 \in S_r$  et  $K_r$  est réelle.

Donc si  $u_r = 0$ , I.6.B bis est une conséquence de I.6.A bis et on démontre l'existence de  $K_r$  comme précédemment.

Si maintenant  $u_r \geq 2$ ,  $-1$  se décompose dans  $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$  et  $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$  sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

La condition I.6.A bis implique donc comme précédemment, que  $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$  d'où  $-a_0 \in S_r$ .

Si  $u_r = 2$ ,  $a_0 \notin S_r$  (lemme I.2 bis) donc les conditions I.6.A bis et I.6.B bis sont incompatibles.

Si  $u_r \geq 3$ , les conditions I.6.A bis et I.6.B bis impliquent donc  $a_0 \in S_r$ , d'où  $\alpha_0 \equiv 0 (2^r)$ .

On termine la démonstration comme précédemment.

## CHAPITRE II

### DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

#### II.1. RAPPELS

Soient  $K$  et  $K'$  deux corps de nombres,  $K'$  étant abélien sur  $K$ . Soient  $A$  et  $A'$  leurs anneaux d'entiers respectifs et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ .  $\mathfrak{p}A'$  se décompose en idéaux premiers de  $A'$  sous la forme:  $\mathfrak{p}A' = (\prod_{1 \leq v \leq g} \mathfrak{p}_v)^e$

et pour tout  $v$  de 1 à  $g$ ,  $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$  a pour dimension  $f$  sur  $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ .  $f$  est le degré résiduel de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$  et  $e$  l'indice de ramification de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$  (ou de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$ ). On a les relations:

$$efg = [K':K] \quad \text{et} \quad N_{K'/K}(\mathfrak{p}_v) = \mathfrak{p}^f.$$

Les  $\mathfrak{p}_v$ ,  $1 \leq v \leq g$ , sont exactement les idéaux premiers de  $A'$  contenant  $\mathfrak{p}$ .

Soit  $G(K'/K)$  le groupe de Galois de  $K'$  sur  $K$ . L'ensemble des  $\sigma$  de  $G(K'/K)$  tel que  $\sigma(\mathfrak{p}_v) = \mathfrak{p}_v$  est un sous-groupe de  $G(K'/K)$  ne dépendant pas de  $v$  et appelé groupe de décomposition de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$  (ou de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$ ). Son cardinal est égal à  $ef$ . S'il est égal à 1, on dit que  $\mathfrak{p}$  se décompose complètement dans  $K'$ .

L'ensemble des  $\sigma$  de  $G(K'/K)$  tel que  $\sigma(x) - x$  appartienne à  $\mathfrak{p}_v$ , pour tout  $x$  de  $A'$ , est un sous-groupe de  $G(K'/K)$  ne dépendant pas de  $v$  et appelé groupe d'inertie de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$  (ou de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$ ).

Son cardinal est égal à  $e$ .  $\mathfrak{p}$  est dit ramifié dans  $K'$  si  $e \geq 2$  ([1] chapitre 5; [2] chapitre 5).

Soit  $K''$  un corps de nombres, contenant  $K'$  et abélien sur  $K$ , et soit  $A''$  son anneau d'entiers. Si  $\mathfrak{p}_v A''$  se décompose en idéaux premiers de  $A''$  sous la forme:  $\mathfrak{p}_v A'' = (\prod_{1 \leq v' \leq g'} \mathfrak{p}_{vv'})^{e'}$  et si  $f'$  désigne le degré résiduel de  $\mathfrak{p}_{vv'}$  sur  $K'$ , les quantités  $e'$ ,  $g'$ ,  $f'$  sont les mêmes pour tout  $v$  entre 1 et  $g$ . L'indice de ramification de  $\mathfrak{p}$  dans  $K''$  est  $ee'$  et son degré résiduel  $ff'$ . Si  $D$  est le groupe de décomposition de  $\mathfrak{p}_{vv'}$  sur  $K$  et  $\pi$  l'application de  $G(K''/K)$  sur  $G(K'/K)$  qui à tout automorphisme de  $K''$  fait correspondre sa restriction à  $K'$ , alors  $D \cap G(K''/K')$  est le groupe de décomposition de  $\mathfrak{p}_{vv'}$  sur  $K'$  et  $\pi(D)$  est le groupe de décomposition de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$ . On a un résultat analogue avec les groupes d'inertie ([3] chapitre 1).

On appelle corps de décomposition de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$  le sous-corps de  $K'$  laissé invariant par les éléments du groupe de décomposition de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$ . C'est le plus grand corps, compris entre  $K$  et  $K'$ , dans lequel  $\mathfrak{p}$  se décompose complètement. De même le corps d'inertie de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$  est le sous-corps de  $K'$  laissé invariant par les éléments du groupe d'inertie de  $\mathfrak{p}$  dans  $K'$ . C'est le plus grand corps compris entre  $K$  et  $K'$ , dans lequel  $\mathfrak{p}$  ne se ramifie pas ([4] chapitre 2).

*Différente*: L'ensemble des  $x$  de  $K'$  tels que  $Tr_{K'/K}(xA') \subseteq A$ , est un idéal fractionnaire de  $K'$  dont l'inverse est la différente de  $K'$  sur  $K$  notée  $\delta_{K'/K}$ . Elle est engendrée par les  $F'(x)$ , où  $x$  parcourt  $A'$  et  $F$  désigne le polynôme minimal de  $x$  sur  $K$ . Si  $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$  sont les idéaux de  $A'$  ramifiés sur  $K$ , alors:

$$\delta_{K'/K} = \prod_{1 \leq v \leq m} \mathfrak{p}_v^{h_v}.$$

Si  $e_v$  est l'indice de ramification de  $\mathfrak{p}_v$  sur  $K$  on a:  $h_v \geq e_v - 1$  et  $h_v = e_v - 1$  si et seulement si  $e_v$  est premier avec la caractéristique du corps  $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$ . Le discriminant de  $K'$  sur  $K$  est  $N_{K'/K}(\delta_{K'/K})$  et on a la formule de transitivité:  $\delta_{K''/K} = \delta_{K''/K'} \delta_{K'/K}$  ([2] chapitre 4, [5] chapitre 3).

*Corps cyclotomiques*: Dans un corps cyclotomique  $\Omega(p^s)$ , ( $p$  premier)  $p$  est leur seul nombre premier ramifié et:  $p = (1 - \xi)^{\varphi(p^s)}$ ,  $\xi$  désignant une racine primitive  $(p^s)$ ème de 1, est la décomposition de  $p$  en idéaux premiers de  $\Omega(p^s)$ .

$p$  est ramifié dans un corps cyclotomique  $\Omega(n)$  si et seulement si  $p$  divise  $n$ . Si  $n$  s'écrit:  $n = p^s n'$  avec  $n'$  premier avec  $p$ , alors le corps d'inertie de  $p$  dans  $\Omega(n)$  est  $\Omega(n')$  et l'indice de ramification de  $p$  dans  $\Omega(n)$  est  $\varphi(p^s)$ . Si  $q$  est premier avec  $n$ , la classe de  $q$  modulo  $n$  est l'automorphisme de Frobenius, et elle engendre dans  $G(n)$  le groupe de décomposition de  $q$  dans  $\Omega(n)$ . Le degré résiduel de  $q$  dans  $\Omega(n)$  est donc le plus petit entier  $f$  tel que:  $q^f \equiv 1 \pmod{n}$ .

Si  $\xi$  est une racine primitive  $n$ ème de 1,  $\{1, \xi, \dots, \xi^{\varphi(n)-1}\}$  est une base de l'anneau des entiers de  $\Omega(n)$  sur  $\mathbb{Z}$ . Le discriminant de  $\Omega(n)$  sur  $\mathbb{Q}$  est:

$$\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}$$

ce dernier produit étant étendu à tous les nombres premiers  $p$  divisant  $n$  ([5] chapitre 4).

## II.2. NOMBRES PREMIERS RAMIFIÉS DANS UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE $\mathbb{Q}$

### LEMME II.1.

Soient  $K$  une extension abélienne de  $\mathbb{Q}$  et  $\Omega(n)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K$ . Alors un nombre premier  $p$  se ramifie dans  $K$  si et seulement s'il divise  $n$ .

Si  $p$  est ramifié dans  $K$ , alors il est ramifié dans tout surcorps de  $K$ , donc dans  $\Omega(n)$  et il divise  $n$ .

Réiproquement, si  $p$  divise  $n$ , posons  $n = p^s n'$ , avec  $n'$  premier avec  $p$ .