Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'

SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: I.9. Conditions d'inclusion de \$K_r\$ dans \$K_{r'}\$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

choix d'un sous-groupe S_r . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_i vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

Proposition I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions K_r , de degré 2^r sur Q, cycliques sur Q, admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est:

- Dans le cas où
$$3 \le u_r \le r + 1$$
:
$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \le i \le r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$
- Dans le cas où $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:
$$2 \prod_{1 \le i \le r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$
- Dans le cas où $u_r = 0$ ou 2:
$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \le i \le r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

I.9. Conditions d'inclusion de K_r dans $K_{r'}$

Proposition I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \le i \le r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r.

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q, contenant K_r , si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \le i \le r}$ vérifie la condition:

I.6.A: Pour tout i de 1 à r et tout
$$j \leq m_i$$
, $p_j \equiv 1 (p^{r'-i+1})$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r .

Plaçons-nous dans le cas où $2 \le u_r \le r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \le i$ $\le r$ et $n'_i = p^{i-r}n_r$ pour $r < i \le r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \le i \le r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_{r'})$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo $n'_{r'}$ fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_{r'})$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.

Soient $b_0', c_1', c_2', \dots c_{m_r}'$ des générateurs des sous-groupes

$$T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p^{u'_{r'}}}\right), T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_1}\right), \dots T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_{m_r}}\right)$$

et soit

$$b_0 = \pi(b'_0), c_1 = \pi(c'_1), \dots c_{m_r} = \pi(c'_{m_r}).$$

Alors $b_0, c_1, \dots c_{m_r}$ sont des générateurs de

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{u_r}}\right), T\left(n_r, \frac{n_r}{p_1}\right), \dots T\left(n_r, \frac{n_r}{p_{m_r}}\right).$$

Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ admettant K_r comme corps fixe. D'après la proposition I.3, il existe $\alpha_0, \alpha_2, \dots \alpha_{m_r}$ vérifiant I.3.A et I.3.B et tels que S_r soit engendré par:

$$\{c_1^{pr}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}.$$

Soit $S'_{r'}$ le sous-groupe de $G(n'_{r'})$ engendré par: $\{c_1^{'pr'}, c_1^{'\alpha_0}b_0^{'}, c_1^{'\alpha_j}c_j^{'}; 2 \leq j \leq m_r\}$ et soit $K_{r'}$ le sous-corps de $\Omega(n'_{r'})$ corps fixe de $S'_{r'}$. D'après la proposition I.4, $K_{r'}$ est une extension cyclique de degré $p^{r'}$ de Q.

D'autre part, on vérifie que $\pi(S'_{r'}) \subset S_r$ qui prouve que $K_{r'}$ contient K_r .

Remarque: On a construit, en fait, plusieurs extensions $K_{r'}$ contenant K_{r} . S_{r} étant donné, les α_{i} ne sont déterminés que modulo p^{r} et si l'on remplace α_{i} par α_{i}' tel que $\alpha_{i} \equiv \alpha_{i}'(p^{r})$ et $\alpha_{i} \not\equiv \alpha_{i}'(p^{r'})$ on obtiendra un autre sous-groupe $S_{r'}$.

Dans le cas où $u_r = r + 1$, la démonstration est analogue.

Dans le cas où $u_r = 0$, on pose simplement $n'_i = n_r$ pour tout i entre r et r' et l'application π est alors l'identité.

Proposition I.6 bis.

Soit K_r une extension cyclique de degré 2^r sur Q, $(\Omega(n_i))_{1 \le i \le r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r. Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $2^{r'}$ sur Q, contenant K_r si et seulement si:

I.6.A bis: Pour tout i de 1 à r et tout $j
leq m_i, p_j
leq 1 (2^{r'-i+1})$.

I.6.B bis: K_r est réelle.

I.6.A bis s'obtient à partir de I.2.B bis.

D'autre part il est nécessaire que K_r soit réelle car: $(-1)^2 = 1 \in S_r$, implique, d'après le lemme I.1, $-1 \in S_i$ pour tout i < r'. Donc tous les sous-corps stricts de $K_{r'}$ sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si $u_r = 0$, -1 se décompose dans les sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \le j \le m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A bis que si $j \le m_i$, alors $\frac{p_j - 1}{2} \equiv 0 \ (2^{r-i+1})$

et compte tenu du lemme I.2 bis, $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$. Donc $-1 \in S_r$ et K_r est réelle.

Donc si $u_r = 0$, I.6.B bis est une conséquence de I.6.A bis et on démontre l'existence de K_r comme précédemment.

Si maintenant $u_r \ge 2$, -1 se décompose dans $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ et $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \le j \le m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

La condition I.6.A bis implique donc comme précédemment, que $c_j^{\frac{p_j-1}{2}}$ $\in S_r$ d'où $-a_0 \in S_r$.

Si $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$ (lemme I.2 bis) donc les conditions I.6.A bis et I.6.B bis sont incompatibles.

Si $u_r \ge 3$, les conditions I.6.A bis et I.6.B bis impliquent donc $a_0 \in S_r$, d'où $\alpha_0 \equiv 0$ (2^r).

On termine la démonstration comme précédemment.

CHAPITRE II

DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

II.1. RAPPELS

Soient K et K' deux corps de nombres, K' étant abélien sur K. Soient A et A' leurs anneaux d'entiers respectifs et $\mathfrak p$ un idéal premier de A. $\mathfrak pA'$ se décompose en idéaux premiers de A' sous la forme: $\mathfrak pA' = (\prod_{1 \le v \le g} \mathfrak p_v)^e$