

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE  $p'$   
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS  
**Autor:** Oriat, Bernard  
**Kapitel:** I.9. Conditions d'inclusion de  $K_r$  dans  $K_{r'}$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

choix d'un sous-groupe  $S_r$ . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les  $\alpha_j$  vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions  $K_r$ , de degré  $2^r$  sur  $Q$ , cycliques sur  $Q$ , admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  est :

— Dans le cas où  $3 \leq u_r \leq r + 1$  :

$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où  $u_r = r + 2$ , en posant  $m_0 = 0$  :

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où  $u_r = 0$  ou  $2$  :

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

#### I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE $K_r$ DANS $K_{r'}$ .

PROPOSITION I.6.

Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  sur  $Q$  ( $p$  premier impair). Soit  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  la suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  et soit  $r'$  un entier strictement supérieur à  $r$ .

Il existe une extension  $K_{r'}$  cyclique de degré  $p^{r'}$  sur  $Q$ , contenant  $K_r$ , si et seulement si la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  vérifie la condition :

I.6.A : Pour tout  $i$  de 1 à  $r$  et tout  $j \leq m_i$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{p^{r'-i+1}}$ .

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension  $K_{r'}$  contenant  $K_r$ .

Plaçons-nous dans le cas où  $2 \leq u_r \leq r$  et posons  $n'_i = n_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $n'_i = p^{i-r} n_r$  pour  $r < i \leq r'$ . La suite  $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$  vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit  $\pi$  la surjection de  $G(n'_r)$  sur  $G(n_r)$  qui à toute classe modulo  $n'_r$  fait correspondre la classe modulo  $n_r$  qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de  $\Omega(n'_r)$  fait correspondre sa restriction à  $\Omega(n_r)$ .

Soient  $b'_0, c'_1, c'_2, \dots, c'_{m_r}$  des générateurs des sous-groupes

$$T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p^{u'_{r'}}}\right), T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_1}\right), \dots, T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_{m_r}}\right)$$

et soit

$$b_0 = \pi(b'_0), c_1 = \pi(c'_1), \dots, c_{m_r} = \pi(c'_{m_r}).$$

Alors  $b_0, c_1, \dots, c_{m_r}$  sont des générateurs de

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{u_r}}\right), T\left(n_r, \frac{n_r}{p_1}\right), \dots, T\left(n_r, \frac{n_r}{p_{m_r}}\right).$$

Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  admettant  $K_r$  comme corps fixe. D'après la proposition I.3, il existe  $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_r}$  vérifiant I.3.A et I.3.B et tels que  $S_r$  soit engendré par :

$$\{c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}.$$

Soit  $S'_{r'}$  le sous-groupe de  $G(n'_{r'})$  engendré par :  $\{c_1^{p^{r'}}, c_1^{\alpha'_0} b'_0, c_1^{\alpha'_j} c'_j; 2 \leq j \leq m_r\}$  et soit  $K_{r'}$  le sous-corps de  $\Omega(n'_{r'})$  corps fixe de  $S'_{r'}$ . D'après la proposition I.4,  $K_{r'}$  est une extension cyclique de degré  $p^{r'}$  de  $Q$ .

D'autre part, on vérifie que  $\pi(S'_{r'}) \subset S_r$  qui prouve que  $K_{r'}$  contient  $K_r$ .

*Remarque :* On a construit, en fait, plusieurs extensions  $K'_{r'}$  contenant  $K_r$ .  $S_r$  étant donné, les  $\alpha_i$  ne sont déterminés que modulo  $p^r$  et si l'on remplace  $\alpha_i$  par  $\alpha'_i$  tel que  $\alpha_i \equiv \alpha'_i (p^r)$  et  $\alpha_i \not\equiv \alpha'_i (p^{r'})$  on obtiendra un autre sous-groupe  $S'_{r'}$ .

Dans le cas où  $u_r = r + 1$ , la démonstration est analogue.

Dans le cas où  $u_r = 0$ , on pose simplement  $n'_i = n_r$  pour tout  $i$  entre  $r$  et  $r'$  et l'application  $\pi$  est alors l'identité.

#### PROPOSITION I.6 bis.

Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $2^r$  sur  $Q$ ,  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  la suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  et soit  $r'$  un entier strictement supérieur à  $r$ . Il existe une extension  $K_{r'}$  cyclique de degré  $2^{r'}$  sur  $Q$ , contenant  $K_r$  si et seulement si :

*I.6.A bis :* Pour tout  $i$  de 1 à  $r$  et tout  $j \leq m_i, p_j \equiv 1 (2^{r'-i+1})$ .

*I.6.B bis :*  $K_r$  est réelle.

I.6.A bis s'obtient à partir de I.2.B bis.

D'autre part il est nécessaire que  $K_r$  soit réelle car:  $(-1)^2 = 1 \in S_r$ , implique, d'après le lemme I.1,  $-1 \in S_i$  pour tout  $i < r'$ . Donc tous les sous-corps stricts de  $K_r$  sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si  $u_r = 0$ ,  $-1$  se décompose dans les sous-groupes  $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$  de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A *bis* que si  $j \leq m_i$ , alors  $\frac{p_j-1}{2} \equiv 0 \pmod{2^{r-i+1}}$

et compte tenu du lemme I.2 *bis*,  $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$ . Donc  $-1 \in S_r$  et  $K_r$  est réelle.

Donc si  $u_r = 0$ , I.6.B *bis* est une conséquence de I.6.A *bis* et on démontre l'existence de  $K_r$  comme précédemment.

Si maintenant  $u_r \geq 2$ ,  $-1$  se décompose dans  $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$  et  $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$  sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

La condition I.6.A *bis* implique donc comme précédemment, que  $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$  d'où  $-a_0 \in S_r$ .

Si  $u_r = 2$ ,  $a_0 \notin S_r$  (lemme I.2 *bis*) donc les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* sont incompatibles.

Si  $u_r \geq 3$ , les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* impliquent donc  $a_0 \in S_r$ , d'où  $a_0 \equiv 0 \pmod{2^r}$ .

On termine la démonstration comme précédemment.

## CHAPITRE II

### DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

#### II.1. RAPPELS

Soient  $K$  et  $K'$  deux corps de nombres,  $K'$  étant abélien sur  $K$ . Soient  $A$  et  $A'$  leurs anneaux d'entiers respectifs et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ .  $\mathfrak{p}A'$  se décompose en idéaux premiers de  $A'$  sous la forme:  $\mathfrak{p}A' = \left( \prod_{1 \leq v \leq g} \mathfrak{p}_v \right)^e$