

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE  $p'$   
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS  
**Autor:** Oriat, Bernard  
**Kapitel:** I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps  
cyclotomiques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si  $u_r = r + 2$ , soient des nombres  $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$  et  $\alpha_j$ , pour  $1 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :  $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$ .

— Si  $u_r = 2$ , soient des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si  $u_r = 0$ , soient des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

Soit enfin,  $K_r$  le sous-corps de  $\Omega(n_r)$ , corps fixe de  $S_r$ . Alors :

$K_r$  est une extension cyclique sur  $Q$ , de degré  $2^r$ . La suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  est la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ .

### I.8. NOMBRE D'EXTENSIONS ASSOCIÉES A UNE MÊME SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES

#### PROPOSITION I.5.

Soit  $p$  un nombre premier impair et  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions  $K_r$  de degré  $p^r$  sur  $Q$ , cycliques sur  $Q$ , admettant la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  comme suite de corps cyclotomiques associée est :

— Dans le cas où  $2 \leq u_r \leq r$  :

$$\varphi(p^{r-l+1}) \varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où  $u_r = r + 1$ , et en posant  $m_0 = 0$  :

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où  $u_r = 0$  :

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

Si par exemple,  $2 \leq u_r \leq r$ , on peut remplacer dans le système de générateurs de  $S_r$  donné en I.3,  $c_1^{\alpha_0} b_0$  par  $c_1^{\alpha_0+k_0 p^r} b_0$ ,  $c_1^{\alpha_2} c_2$  par  $c_1^{\alpha_2+k_2 p^r} c_2$ , ... et choisir ainsi des  $\alpha_i$ , compris entre 0 et  $p^r$ . Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de  $\alpha_i$  sont alors déterminées de façon unique par le

choix d'un sous-groupe  $S_r$ . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les  $\alpha_j$  vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions  $K_r$ , de degré  $2^r$  sur  $Q$ , cycliques sur  $Q$ , admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  est :

— Dans le cas où  $3 \leq u_r \leq r + 1$  :

$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où  $u_r = r + 2$ , en posant  $m_0 = 0$  :

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où  $u_r = 0$  ou  $2$  :

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

#### I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE $K_r$ DANS $K_{r'}$ .

PROPOSITION I.6.

Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  sur  $Q$  ( $p$  premier impair). Soit  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  la suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  et soit  $r'$  un entier strictement supérieur à  $r$ .

Il existe une extension  $K_{r'}$  cyclique de degré  $p^{r'}$  sur  $Q$ , contenant  $K_r$ , si et seulement si la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  vérifie la condition :

I.6.A : Pour tout  $i$  de 1 à  $r$  et tout  $j \leq m_i$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{p^{r'-i+1}}$ .

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension  $K_{r'}$  contenant  $K_r$ .

Plaçons-nous dans le cas où  $2 \leq u_r \leq r$  et posons  $n'_i = n_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $n'_i = p^{i-r}n_r$  pour  $r < i \leq r'$ . La suite  $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$  vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit  $\pi$  la surjection de  $G(n'_r)$  sur  $G(n_r)$  qui à toute classe modulo  $n'_r$  fait correspondre la classe modulo  $n_r$  qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de  $\Omega(n'_r)$  fait correspondre sa restriction à  $\Omega(n_r)$ .