

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE  $p'$   
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS  
**Autor:** Oriat, Bernard  
**Kapitel:** I.7. Construction d'extensions cycliques de degré  $2^r$  sur  $Q$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

— Dans le cas où  $u_r = r + 2$ , il existe des nombres  $\alpha_j$ , pour  $0 \leq j \leq m_r$ , tels que  $S_r$  soit engendré par:  $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$ .

$\alpha_0$  vérifie la condition:  $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ .

Les  $\alpha_j$ , pour  $1 \leq j \leq m_r$ , vérifient la condition I.3.B bis.

— Dans le cas où  $u_r = 2$ , il existe des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant la condition I.3.B bis et tels que  $S_r$  soit engendré par:  $\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}$ .

— Dans le cas où  $u_r = 0$ , il existe des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant la condition I.3.B bis et tels que  $S_r$  soit engendré par:  $\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}$ .

On démontre tout d'abord le lemme suivant:

LEMME I.2 bis

— Dans le cas où  $u_r \geq 3$ ,  $a_0^{2^{r-l+1}} = 1$  et  $a_0^{2^{r-l}} \notin S_r$ .

— Dans le cas où  $u_r = 2$ ,  $a_0 \notin S_r$ .

— Si  $m_{i-1} < j \leq m_i$  alors  $c_j^{2^{r-i+1}} \in S_r$  et  $c_j^{2^{r-i}} \notin S_r$ .

En effet si  $u_r \geq 3$ , la condition I.2.A bis implique  $u_r = r - l + 3$ .  $2^{r-l+1}$  est donc de l'ordre de  $a_0$  et d'autre part, si  $a_0^{2^{r-l}} \in S_r$ , alors:

$$\left( T \left( n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}} \right) \right)^{(2^{r-l})} = T \left( n_r, \frac{n_r}{2} \right) \in S_r.$$

D'où  $K_r \subseteq \Omega \left( \frac{n_r}{2} \right)$  et  $\Omega(n_r)$  ne serait pas le plus petit corps cyclotomique

contenant  $K_r$ . De même si  $u_r = 2$  et  $a_0 \in S_r$  alors on aurait  $K_r \subseteq \Omega \left( \frac{n_r}{4} \right)$ .

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration de I.3.

I.7. CONSTRUCTION D'EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ  $2^r$  SUR  $Q$

PROPOSITION I.4 bis

Réciproquement, soit  $r$  un entier positif et  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis.

— Si  $3 \leq u_r \leq r + 1$ , soient des nombres:  $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ ,  $\alpha_0'$ , vérifiant I.3.A bis,  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$

le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si  $u_r = r + 2$ , soient des nombres  $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$  et  $\alpha_j$ , pour  $1 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :  $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$ .

— Si  $u_r = 2$ , soient des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si  $u_r = 0$ , soient des nombres  $\alpha_j$ , pour  $2 \leq j \leq m_r$ , vérifiant I.3.B bis. Soit  $S_r$  le sous-groupe de  $G(n_r)$  engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

Soit enfin,  $K_r$  le sous-corps de  $\Omega(n_r)$ , corps fixe de  $S_r$ . Alors :

$K_r$  est une extension cyclique sur  $Q$ , de degré  $2^r$ . La suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  est la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ .

### I.8. NOMBRE D'EXTENSIONS ASSOCIÉES A UNE MÊME SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES

#### PROPOSITION I.5.

Soit  $p$  un nombre premier impair et  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions  $K_r$  de degré  $p^r$  sur  $Q$ , cycliques sur  $Q$ , admettant la suite  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  comme suite de corps cyclotomiques associée est :

— Dans le cas où  $2 \leq u_r \leq r$  :

$$\varphi(p^{r-l+1}) \varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où  $u_r = r + 1$ , et en posant  $m_0 = 0$  :

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où  $u_r = 0$  :

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

Si par exemple,  $2 \leq u_r \leq r$ , on peut remplacer dans le système de générateurs de  $S_r$  donné en I.3,  $c_1^{\alpha_0} b_0$  par  $c_1^{\alpha_0+k_0 p^r} b_0$ ,  $c_1^{\alpha_2} c_2$  par  $c_1^{\alpha_2+k_2 p^r} c_2$ , ... et choisir ainsi des  $\alpha_i$ , compris entre 0 et  $p^r$ . Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de  $\alpha_i$  sont alors déterminées de façon unique par le