L'ensemble des $\mu(f_j)$, j de 0 à m_r, est un système de générateurs de S_r.

Dans les autres cas, on procède de la même façon: si $u_r = r + 1$, on a $l = 1$, $b_0^{p^r} \in H_r$ et $b_0^{p^{r-1}} \notin H_r$. On place donc b_0 en premier, c'est-à-dire que l'on cherche une base $(f_0, f_1, \dots f_{m_r})$ de H_r telle que la matrice A de $(f_0, f_1, \dots f_{m_r})$ par rapport à $(e_0, e_1, e_2 \dots e_{m_r})$ soit triangulaire.

Remarque: S_r n'est pas en général, produit direct des sous-groupes cycliques engendrés par chacun des générateurs obtenus.

I.5. Construction d'extensions cycliques K_r de degré p^r sur Q dans le cas où p est impair

Proposition I.4.

Réciproquement, soient p un nombre premier impair, r un entier positif $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B.

— *Si* $2 \leq u_r \leq r$, soient des nombres α_0, vérifiant la condition I.3.A, et α_j, pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{ c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leq j \leq m_r \}$.

— *Si* $u_r = r + 1$, soient des nombres α_j, pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B et soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{ b_0^{p^r}, b_0^{\alpha_j} c_j ; 1 \leq j \leq m_r \}$.

— *Si* $u_r = 0$, soient des nombres α_j, pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B et soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{ c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leq j \leq m_r \}$.

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r. Alors:

K_r est une extension cyclique sur Q, de degré p^r. La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$.

Supposons $2 \leq u_r \leq r$, utilisons à nouveau l'application μ de Z^{m_r+1} sur $G(n_r)$ définie dans la démonstration précédente. Soit H_r le sous-module de Z^{m_r+1} ayant pour base: $(f_0, f_1, \dots f_{m_r})$ avec $f_1 = p^r e_1$, et $f_j = \alpha_j e_1 + e_j$ pour tout j différent de 1. On a $\mu(H_r) = S_r$ et d'autre part les conditions I.3.A et I.3.B impliquent que:

— $p^{r-l+1} e_0 \in H_r$ et $p^{r-l} e_0 \notin H_r$.

— Si $m_{i-1} < j \leqq m_i$ alors $p^{r-i+1}e_j \in H_r$ et $p^{r-i}e_j \notin H_r$.

On en déduit tout d'abord que $(p-1)\,p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et compte tenu de la condition I.2.B $(p_j-1)\,e_j \in H_r$ pour $1 \leqq j \leqq m_r$. Le noyau de μ qui a pour base: $\{(p-1)\,p^{r-l+1}e_0, (p_1-1)\,e_1, \dots (p_{m_r}-1)\,e_{m_r}\}$ est donc contenu dans H_r.

On a donc $H_r = \mu^{-1}(S_r)$ et $\dfrac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est isomorphe à $\dfrac{G(n_r)}{S_r}$.

Le degré de K_r sur Q est donc égal à

$$\mathrm{Card}\left(\frac{G(n_r)}{S_r}\right) = \mathrm{Card}\left(\frac{Z^{m_r+1}}{H_r}\right) = p^r.$$

Comme $p^{r-1}e_1 \notin H_r$, $\dfrac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est donc un groupe cyclique. K_r est donc cyclique sur Q.

Soient H_i les sous-modules de Z^{m_r+1} ayant pour bases $\{p^ie_1, f_0, f_2, \dots f_{m_r}\}$, i de 1 à r. Soient S_i les sous-groupes de $G(n_r)$ définis par $S_i = \mu(H_i)$ et K_i les sous-corps de $\Omega(n_r)$ corps fixes de chacun des S_i.

Pour tout i de 1 à r, H_i contient H_r, donc K_i est un sous-corps de K_r. L'indice de H_r dans H_i est p^{r-i}, donc K_i est le sous-corps de K_r de degré p^i sur Q.

On a $p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et $p^{r-l}e_0 \notin H_r$. D'où $b_0^{p^{r-l+1}} \in S_r$ et $b_0^{p^{r-l}} \notin S_r$. Donc $b_0^{(p-1)p^{r-l}} \notin S_r$, $T\left(n_r, \dfrac{n_r}{p}\right) \nsubseteq S_r$ d'où $K_r \nsubseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p}\right)$.

De même si $m_{i-1} < j \leqq m_i$, on a alors $c_j^{p^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{p^{r-i}} \notin S_r$, et compte tenu du lemme I.1, $c_j \in S_{i-1}$ et $c_j \notin S_i$, c'est-à-dire:

$$K_{i-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right) \quad \text{et} \quad K_i \nsubseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right)$$

$(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ est donc la suite de corps cyclotomiques associée à K_r.

Dans les cas $u_r = 0$ et $u_r = r+1$, la démonstration est analogue.

I.6. Système de générateurs de S_r. Cas où $p = 2$

Si K_r est une extension de degré 2^r sur Q, cyclique sur Q, on peut de la même façon donner un système de générateurs du sous-groupe S_r de $G(n_r)$.