

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRÉ  $p^r$   
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

**Autor:** Oriat, Bernard

**Kapitel:** I.2. Plus petit corps cyclotomique contenant une extension ABÉLIENNE  
DE DEGRÉ  $p^r$  SUR  $\mathbb{Q}$

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$ . Comme d'autre part  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$  est cyclique,  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$  et  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right) \left( (p_i - 1) p_i^{s_i - 1} \right)^*$  possèdent le même nombre d'éléments.  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$  est donc l'ensemble des puissances  $\left( (p_i - 1) p_i^{s_i - 1} \right)^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ .

Rappelons que si  $r \geq 3$ ,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^r}\right)^*$  est produit direct de  $\{-1, 1\}$  et de  $T(2^r, 4)$ . Si  $p_i = 2$ ,  $r_i \geq 3$ , posons  $a_0 = \theta_i^{-1}(-1)$ ;  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$  est produit direct de  $\{a_0, 1\}$  et de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$  qui est cyclique. Pour tout  $s_i$  entre 3 et  $r_i$ ,  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - s_i}}\right)$  est alors l'ensemble des puissances  $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$ . C'est aussi l'ensemble des puissances  $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$ .

## I.2. PLUS PETIT CORPS CYCLOTOMIQUE CONTENANT UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE DEGRÉ $p^r$ SUR $Q$

### PROPOSITION I.1.

Soit  $r$  un entier positif,  $p$  un nombre premier impair,  $K$  une extension abélienne de degré  $p^r$  sur  $Q$ ,  $\Omega(n)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K$ . Alors  $n$  est de la forme  $n = p^s p_1 p_2 \dots p_m$  et vérifie les conditions:

—  $0 \leq s \leq r + 1$ .

—  $s \neq 1$ .

— Les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts et congrus à 1 modulo  $p$ .

\*)  $G^{(n)}$  désigne le sous-groupe de  $G$  formé des puissances  $n^{\text{eme}}$  d'éléments de  $G$ .

Le théorème de Kronecker permet d'affirmer qu'il existe  $n'$  tel que  $\Omega(n')$  contienne  $K$ . Soit  $n' = p^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$  la décomposition de  $n'$  en facteurs premiers et soit  $S$  le sous-groupe de  $G(n')$  constitué par les  $K$ -automorphismes.

1. Montrons que si  $p_i \not\equiv 1 (p)$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$ . Il est équivalent de montrer que  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right) \subseteq S$ ; soit  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$ , puisque  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$  est d'ordre  $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$ , on aura donc:  $h^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$  ( $1_{\Omega(n')}$  désignant l'identité sur  $\Omega(n')$ ). Si  $\sigma$  est la restriction de  $h$  à  $K$ , on aura également  $\sigma^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_K$ . D'autre part  $\sigma^{p^r} = 1_K$  puisque  $K$  est de degré  $p^r$  sur  $Q$ . Comme  $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$  et  $p^r$  sont premiers entre eux, on en déduit que  $\sigma = 1_K$  et  $h \in S$ .

2. Montrons que si  $p_i \equiv 1 (p)$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$ . Cela revient à démontrer que  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right) \subseteq S$ .

Soit  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$ , puisque ce sous-groupe est d'ordre  $p_i^{u_i - 1}$ , on aura donc  $h^{p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$ . D'où,  $\sigma$  étant la restriction de  $h$  à  $K$ ,  $\sigma^{p_i^{u_i - 1}} = 1_K$ . D'autre part  $\sigma^{p^r} = 1_K$  pour la même raison que précédemment. Comme  $p_i^{u_i - 1}$  et  $p^r$  sont premiers entre eux,  $\sigma = 1_K$  et  $h \in S$ .

3. Montrons que  $s \leq r + 1$ , c'est-à-dire, montrons que si  $u \geq r + 2$  alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right)$ .

En effet si  $u \geq r + 2$ ,  $T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{p^u}\right)^{(p - 1)p^r}$ . Tout élément  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right)$  est donc une puissance  $(p^r)^{\text{ème}}$ . Il en est de même de la restriction de  $h$  à  $K$  qui est l'identité de  $K$ , puisque  $K$  est de degré  $p^r$  sur  $Q$ . On a donc  $T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right) \subseteq S$ .

4. Montrons enfin que  $s \neq 1$ .

Pour cela, montrons que si  $u = 1$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p}\right)$ . Si  $u = 1$ , alors

$T\left(n', \frac{n'}{p}\right)$  a pour ordre  $p - 1$  et comme  $p - 1$  est premier à  $p^r$ , on en déduit  
 $T\left(n', \frac{n'}{p}\right) \subseteq S$ .

PROPOSITION I.1 bis.

Soit  $r$  un entier positif et  $K$  une extension abélienne de degré  $2^r$  sur  $Q$ ,  $\Omega(n)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K$ . Alors  $n$  est de la forme  $n = 2^s p_1 p_2 \dots p_m$  et vérifie la condition

—  $0 \leq s \leq r + 2$ .

— Les  $p_i$  sont des nombres premiers impairs distincts.

La démonstration est analogue à la précédente. Pour montrer que  $s \leq r + 2$ , on constate que si  $u \geq r + 3$  et si  $n' = 2^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$ , alors

$$T\left(n', \frac{n'}{2^{u-r-2}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{2^u}\right)^{2^r}.$$

### I.3. SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES ASSOCIÉE A UNE EXTENSION CYCLIQUE $K_r$

DÉFINITION:

Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  ( $p$  premier) sur  $Q$ . Pour  $i$  entre 1 et  $r$  soit  $K_i$  l'unique sous-corps de  $K_r$  de degré  $p^i$  sur  $Q$ . Soit  $\Omega(n_i)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K_i$ . On appellera « suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  » la suite des  $r$  corps  $\Omega(n_i)$ .

PROPOSITION I.2.

Soit  $r$  un entier positif et  $p$  un nombre premier impair. Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  sur  $Q$ . Soit  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  la suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$ .

Alors les  $n_i$  vérifient les conditions suivantes:

I.2.A. Pour tout  $i$  de 1 à  $r$ , la décomposition de  $n_i$  en facteurs premiers est  $n_i = p^{u_i} p_1 \dots p_{m_i}$ ; la suite  $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$  est non décroissante. La suite  $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  est non décroissante, éventuellement nulle.