

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN
DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS
BORNÉES
Autor: Jambon, M.
Kapitel: §9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45380>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

§ 9. EVALUATIONS POUR LA FONCTION $g(x, y)$ DU THÉORÈME 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_v \times G_v$ indépendamment de v pour v supérieur à un v_0 convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |x - y| \leq b, \quad |g(x, y)| \geq K_1 |P(x, y)|.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g ; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leq b, \quad g(x, y) = P(x, y) e^{C(x, y) - A(x, y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. Minoration de $\operatorname{Re} P(x, y)$.

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$\operatorname{Re} P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] + O(|x - y|^3).$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G , il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] \geq C |x - y|^2.$$

$$\text{On a aussi } \exists \delta, \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow O(|x - y|^3) \leq \frac{C}{2} |x - y|^2.$$

Donc $\forall v \geq v_0$ (v_0 choisi assez grand)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_v \times G_v \\ |x - y| \leq \delta \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{Re} P(x, y) \geq \frac{C}{2} |x - y|^2.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_v \times G_v \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geq 0$ et ce terme disparaît.

3. Minoration de $| \operatorname{Im} P(x, y) |$.

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y] - \partial \otimes \partial \varphi(x) [x - y, x - y],$$

d'où $P(x, y) = 2 \partial \varphi(y) [x - y] + 0 (|x - y|^2)$. Mais $\partial \varphi(y) [x - y] = \frac{1}{2} \{ d\varphi(y) [x - y] - i d\varphi(y) [i(x - y)] \}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $\operatorname{Im} P(x, y) = -i d\varphi(y) [i(x - y)] + 0 (|x - y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y , tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{x \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$ est $x'_1 = 0$, et $iH = \{x \mid x''_1 = 0\}$, $x - y = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| = |d\varphi(y)|$,

$$| \operatorname{Im} P(x, y) | = \left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| \times |x'_1| + 0 (|x - y|^2).$$

$|d\varphi(y)|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G , donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et v_0 , tel que si $v \geq v_0$

$$(3) \quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, | \operatorname{Im} P(x, y) | \geq A |x''_1| - B |x - y|^2.$$

4. Minoration de $|P(x, y)|$ et $|g(x, y)|$.

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\forall \alpha, \beta, \gamma$ dans \mathbf{R} , $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geq \beta - \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha \frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha + \gamma)^2 \leq \beta(\alpha + \gamma)$, ou $\alpha^2 \leq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha + \beta) \leq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$,

$$\text{d'où} \quad \max (\alpha, \beta - \gamma) = \beta - \gamma \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x, y)| \geq \max \left(\frac{c}{2} |x - y|^2, A |x''_1| - B |x - y|^2 \right)$$

$$\text{d'où} \quad |P(x, y)| \geq \frac{\frac{c}{2}}{c + B} \left(\frac{c}{2} |x - y|^2 + A |x''_1| \right) \quad \text{d'après le lemme 9.2.}$$

Concluons:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 > 0, v_0 \in \mathbb{N}, \delta > 0, \\ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |P(x, y)| \\ \qquad \qquad \qquad \geq k_1 (|x - y|^2 + |x''_1|) \end{array} \right.$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists k > 0, \exists v_0 \in \mathbb{N}, \exists \eta > 0,$$

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x - y| \leq \eta \} \\ \Rightarrow |g(x, y)| \geq k (|x - y|^2 + |x''_1|). \end{array} \right.$$

§ 10. SOLUTION BORNÉE DE $\bar{\partial}\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v .

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \quad (\S 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \left(\frac{n-1}{q} \right) A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^r a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g} \right).$$