

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN  
DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS  
BORNÉES

**Autor:** Jambon, M.

**Kapitel:** §9. Evaluations pour la fonction  $g(x, y)$  du théorème 5

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45380>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 23.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

§ 9. EVALUATIONS POUR LA FONCTION  $g(x, y)$  DU THÉORÈME 5

1. D'après sa « construction »,  $g$  ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de  $\partial G \times G$ , donc sur  $\partial G_\nu \times G_\nu$ , indépendamment de  $\nu$  pour  $\nu$  supérieur à un  $\nu_0$  convenable. Pour majorer le noyau  $A_{nq}(x, y)$  le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient  $g$  à une certaine puissance.

*Lemme 9.1.* Il existe un voisinage compact de  $\partial G \times G$ , des constantes  $K_1 > 0$  et  $b > 0$  de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |x - y| \leq b, \quad |g(x, y)| \geq K_1 |P(x, y)|.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de  $g$ ; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leq b, \quad g(x, y) = P(x, y) e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer  $|P(x, y)|$ .

2. *Minoration de  $Re P(x, y)$ .*

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] + 0(|x - y|^3).$$

La plurisousharmonicité de  $\varphi$  entraîne que, pour  $x$  dans un voisinage compact de  $\partial G$ , il existe  $C > 0$  tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] \geq C |x - y|^2.$$

On a aussi  $\exists \delta, |x - y| \leq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leq \frac{C}{2} |x - y|^2$ .

Donc  $\forall \nu \geq \nu_0$  ( $\nu_0$  choisi assez grand)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ |x - y| \leq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re P(x, y) \geq \frac{C}{2} |x - y|^2.$$

On a remarqué que  $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geq 0$  et ce terme disparaît.

3. *Minoration de  $| \operatorname{Im} P(x, y) |$ .*

Utilisons ici la définition de  $P(x, y)$ , § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y] - \partial \otimes \partial \varphi(x) [x - y, x - y],$$

d'où  $P(x, y) = 2 \partial \varphi(y) [x - y] + 0 (|x - y|^2)$ . Mais  $\partial \varphi(y) [x - y] = \frac{1}{2} \{ d\varphi(y) [x - y] - i d\varphi(y) [i(x - y)] \}$  d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où  $\operatorname{Im} P(x, y) = -i d\varphi(y) [i(x - y)] + 0 (|x - y|^2)$ .

Pour chaque  $y$  utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine  $y$ , tel que l'hyperplan tangent  $H$  à la « surface »  $\{ x \mid \varphi(x) = \varphi(y) \}$  est  $x'_1 = 0$ , et  $iH = \{ x \mid x''_1 = 0 \}$ ,  $x - y = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$ .

Dans ces conditions  $\left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| = |d\varphi(y)|$ ,

$$| \operatorname{Im} P(x, y) | = \left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| \times |x'_1| + 0 (|x - y|^2).$$

$|d\varphi(y)|$  est une fonction continue dans un voisinage compact de  $\partial G$ , donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc  $A > 0$ ,  $B > 0$  et  $v_0$ , tel que si  $v \geq v_0$

$$(3) \quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, | \operatorname{Im} P(x, y) | \geq A |x''_1| - B |x - y|^2.$$

4. *Minoration de  $|P(x, y)|$  et  $|g(x, y)|$ .*

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

*Lemme 9.2.* [2]  $\forall \alpha, \beta, \gamma$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $0 < \alpha$ ,  $0 < \beta$ ,  $0 < \gamma$ ,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

*Démonstration.* Si  $\alpha \geq \beta - \gamma$ ,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha \frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Si  $\alpha < \beta - \gamma$ ,  $\alpha + \gamma < \beta$ . Alors  $(\alpha + \gamma)^2 \leq \beta(\alpha + \gamma)$ , ou  $\alpha^2 \leq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \alpha\beta \leq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$ ,  $\alpha(\alpha + \beta) \leq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$ ,

