Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: §9. Evaluations pour la fonction g (x, y) du théorème 5

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

§ 9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_\nu \times G_\nu$ indépendamment de ν pour ν supérieur à un ν_o convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad | w - y | \leqq b \, , \ | g(x, y) | \geqq K_1 \, | P(x, y) | \, .$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$| x - y | \leqq b \, , \ g(x, y) = P(x, y) \, e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $| P(x, y) |$.

2. *Minoration de $Re\, P(x, y)$.*

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re\, P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] + 0(| x - y |^3) \, .$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G, il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] \geqq C \, | x - y |^2 \, .$$

On a aussi $\exists \, \delta \, , \ | x - y | \leqq \delta \Rightarrow 0(| x - y |^3) \leqq \frac{C}{2} | x - y |^2 \, .$

Donc $\forall \, \nu \geqq \nu_o$ (ν_o choisi assez grand)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ \\ | x - y | \leqq \delta \end{array} \right. \quad \Rightarrow Re\, P(x, y) \geqq \frac{C}{2} | x - y |^2 \, .$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geqq 0$ et ce terme disparaît.

3. *Minoration de* $|\, Im\, P(x, y) \,|$.

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2\, \partial\varphi(x)[x-y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x-y, x-y],$$

d'où $P(x, y) = 2\, \partial\varphi(y)[x-y] + 0(|x-y|^2)$. Mais $\partial\varphi(y)[x-y] = \frac{1}{2}$ $\{ d\varphi(y)[x-y] - i\, d\varphi(y)[i(x-y)] \}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $Im\, P(x, y) = -\, i\, d\varphi(y)[i(x-y)] + 0(|x-y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y, tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{ x \mid \varphi(x) = \varphi(y) \}$ est $x'_1 = 0$, et $i\,H = \{ x \mid x''_1 = 0 \}$, $x-y = (x'_1, x''_1, \ldots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left| \dfrac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| = |\, d\varphi(y) \,|$,

$$|\, Im\, P(x, y) \,| = \left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| \times |\, x'_1 \,| + 0(|\, x-y \,|^2).$$

$|\, d\varphi(y) \,|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G, donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et ν_o, tel que si $\nu \geqq \nu_o$

$$(3) \qquad \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu\,, \; |\, Im\, P(x, y) \,| \geqq A\, |\, x''_1 | - B\, |\, x-y \,|^2 .$$

4. *Minoration de* $|\, P(x, y) \,|$ *et* $|\, g(x, y) \,|$.

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma$ dans $\mathbf{R}$, $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max\, (\alpha, \beta - \gamma) \geqq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta}(\alpha + \beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geqq \beta - \gamma$,

$$\max\, (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha \frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geqq \frac{\alpha}{2\alpha + \gamma}(\alpha + \beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha + \gamma)^2 \leqq \beta(\alpha + \gamma)$, ou $\alpha^2 \leqq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leqq 2\,\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha + \beta) \leqq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$, d'où $$\max(\alpha, \beta-\gamma) = \beta - \gamma \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x,y)| \geqq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2,\ A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $|P(x,y)| \geqq \dfrac{\frac{c}{2}}{c+B}\left(\dfrac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4)\quad \begin{cases} \exists\, k_1 > 0,\ v_0 \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v,\ \forall v \geqq v_0,\ |x-y| \leqq \delta\} \Rightarrow |P(x,y)| \\ \qquad\qquad \geqq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists\, k > 0,\ \exists\, v_0 \in \mathbf{N},\ \exists\, \eta > 0,$$

$$(4')\quad \begin{cases} \{\forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geqq v_0, |x-y| \leqq \eta\} \\ \qquad\qquad \Rightarrow |g(x,y)| \geqq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. Solution bornée de $\bar{\partial}\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v.

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x,y) \qquad (\S\, 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \binom{n-1}{q} A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$