

Chapitre IV ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Faisons dans cette équation $v \rightarrow \infty$; ainsi, pour $y \in G_{v_0}$,

$$\bar{\partial}\zeta_v(y) + \bar{\partial}\gamma_v(y) \rightarrow \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout v_0 , donc $\forall y \in G, \bar{\partial}\alpha = \beta$.

CHAPITRE IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathcal{BC}_{oq}^\infty(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \dots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \dots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leq K|\beta|$.

2. Majoration de γ

On avait
$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$$

On en tire
$$|\gamma(y)| \leq \frac{|\beta|}{(2\pi)^n} \int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \wedge_{\lambda=1}^n (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$$

Soit S la sphère de rayon $R = (\text{diamètre } G)$ et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \wedge_{\lambda=1}^n \frac{(d\bar{z}_\lambda dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leq K |\beta|,$$

où K est indépendant de y , d'où $|\gamma| \leq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.

§ 9. EVALUATIONS POUR LA FONCTION $g(x, y)$ DU THÉORÈME 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_v \times G_v$, indépendamment de v pour v supérieur à un v_0 convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |x - y| \leq b, \quad |g(x, y)| \geq K_1 |P(x, y)|.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g ; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leq b, \quad g(x, y) = P(x, y) e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. *Minoration de $Re P(x, y)$.*

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] + 0(|x - y|^3).$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G , il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] \geq C |x - y|^2.$$

On a aussi $\exists \delta, |x - y| \leq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leq \frac{C}{2} |x - y|^2$.

Donc $\forall v \geq v_0$ (v_0 choisi assez grand)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_v \times G_v \\ |x - y| \leq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re P(x, y) \geq \frac{C}{2} |x - y|^2.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_v \times G_v \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geq 0$ et ce terme disparaît.

3. *Minoration de $| \operatorname{Im} P(x, y) |$.*

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y] - \partial \otimes \partial \varphi(x) [x - y, x - y],$$

d'où $P(x, y) = 2 \partial \varphi(y) [x - y] + 0 (|x - y|^2)$. Mais $\partial \varphi(y) [x - y] = \frac{1}{2} \{ d\varphi(y) [x - y] - i d\varphi(y) [i(x - y)] \}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $\operatorname{Im} P(x, y) = -i d\varphi(y) [i(x - y)] + 0 (|x - y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y , tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{ x \mid \varphi(x) = \varphi(y) \}$ est $x'_1 = 0$, et $iH = \{ x \mid x''_1 = 0 \}$, $x - y = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| = |d\varphi(y)|$,

$$| \operatorname{Im} P(x, y) | = \left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| \times |x'_1| + 0 (|x - y|^2).$$

$|d\varphi(y)|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G , donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et v_0 , tel que si $v \geq v_0$

$$(3) \quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, | \operatorname{Im} P(x, y) | \geq A |x''_1| - B |x - y|^2.$$

4. *Minoration de $|P(x, y)|$ et $|g(x, y)|$.*

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\forall \alpha, \beta, \gamma$ dans \mathbf{R} , $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geq \beta - \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha \frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha + \gamma)^2 \leq \beta(\alpha + \gamma)$, ou $\alpha^2 \leq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha + \beta) \leq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$,

d'où $\max(\alpha, \beta - \gamma) = \beta - \gamma \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta}(\alpha + \beta)$.

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x, y)| \geq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2, A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $|P(x, y)| \geq \frac{\frac{c}{2}}{c+B} \left(\frac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4) \begin{cases} \exists k_1 > 0, v_0 \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x-y| \leq \delta \} \Rightarrow |P(x, y)| \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \geq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists k > 0, \exists v_0 \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0,$$

$$(4') \begin{cases} \{ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x-y| \leq \eta \} \\ \Rightarrow |g(x, y)| \geq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. SOLUTION BORNÉE DE $\bar{\partial}\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v .

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \tag{§ 7.1}$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \left(\frac{n-1}{q}\right) A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^r a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Nous devons donc majorer

$$D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g} \right) \\ = D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{g} \right),$$

car

$$\bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right) = \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f} + \bar{\partial}_x \left(\frac{1}{f} \right) \wedge f^* ;$$

le second terme disparaît dans le produit extérieur avec f^* , de même pour les termes en $\bar{\partial}_x (f^*/f)$ et $\bar{\partial}_x (g^*/g)$. D'où, en tenant compte du § 9, 1 et 4 (4'),

$$\exists h_1 > 0, \exists v_0 \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0 : v \geq v_0, \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v \text{ et } |x - y| \leq \eta$$

on a

$$|D_{1,1,q,r-k,k-1}(\quad)| \leq \frac{h_1}{(|x - y|^2 + |x''_1|) |x - y|^{1+2(n-2)}},$$

d'où: $\exists h > 0, \exists v_0 \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0,$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in (\partial G_v \times G_v), v \geq v_0, |x - y| \leq \eta \\ \Rightarrow |A_{nq}(x, y)| \leq \frac{h}{(|x - y|^2 + |x''_1|) |x - y|^{2n-3}}. \end{array} \right.$$

et de façon presque évidente

$$\exists K_2, |x - y| \geq \eta, v \geq v_0, \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v : |A_{nq}(x, y)| \leq K_2.$$

Notons bien que toutes les constantes intervenant ne dépendent pas de y .

On décompose alors l'intégrale

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \left[\int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \geq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right];$$

le deuxième terme est majoré par $K |\beta| \times \sup_{v \geq v_0} \{\text{Aire } \partial G_v\}$.

Pour le premier terme on utilise (5).

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq |\beta| h \int_{\substack{|x-y| \leq \eta \\ x \in \partial G_v}} \frac{d\sigma}{|x - y|^{2n-3} (|x - y|^2 + |x''_1|)}$$

où $d\sigma$ est l'élément différentiel d'aire sur ∂G_v .

Il se peut que $\partial G_v \cap \{ |x-y| \leq \eta \} = \emptyset$ tout est alors terminé, sinon on peut paramétrer $\partial G_v \cap \{ |x-y| \leq \eta \}$ par $x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x''_n$ avec les notations du § 9.3.

On pose $r = (x''_1{}^2 + x'_2{}^2 + x''_2{}^2 + \dots + x''_n{}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Avec une nouvelle constante l (toujours indépendante de y) on a

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq l |\beta| \int_{r \leq \eta} \frac{dx''_1 dx'_2 dx''_2 \dots dx''_n}{r^{2n-3} (r^2 + |x''_1|)}.$$

On passe en coordonnées sphériques dans \mathbf{R}^{2n-1} ; il vient avec une autre constante M

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq M |\beta| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\eta \frac{r^{2n-2} dr}{r^{2n-3} (r^2 + r |\cos \theta|)} d\theta.$$

On a $\int_0^\eta \frac{dr}{r + |\cos \theta|} = \text{Log}(\eta + |\cos \theta|) - \text{Log}(|\cos \theta|)$

et l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} |\cos \theta| d\theta$ est convergente, ce qui permet de conclure:

THÉORÈME 10.

a) Soit G un domaine strictement pseudo-convexe avec un bord de classe \mathcal{C}^4 . Il existe une application linéaire L continue du sous-espace vectoriel des formes $\bar{\partial}$ -fermées de $\mathcal{B}\mathcal{C}_{(p, q+1)}^\infty(G)$ dans $\mathcal{B}\mathcal{C}_{(p, q)}^\infty(G)$ telle que si $\alpha = L\beta$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

La continuité se traduit par $\exists K > 0, |\alpha| \leq K |\beta|$.

b) Il existe une base de voisinage strictement pseudo-convexe G_v de \bar{G} tels que a) soit valable avec la même constante K .

Pour $p = 0$ la démonstration a été faite.

Pour $p > 0$ il suffit d'écrire

$$\beta = \sum_I \beta_I \wedge dx_I, \text{ où } I = \{i_1 < \dots < i_p\} \subset \{1, \dots, n\},$$

$$\beta_I \in \mathcal{B}\mathcal{C}_{(0, q+1)}^\infty(G) \text{ et } \bar{\partial}\beta = 0 \Rightarrow \bar{\partial}\beta_I = 0;$$

le problème est ramené à $p = 0$.

Le b) résulte de ce que tout ce qui a été fait sur les G_ν aurait pu être fait sur $\tilde{G}_\nu = \{x \mid \varphi(x) < \varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu \searrow 0$, pour ν suffisamment grand, car la condition $G_\nu \subset \subset G$ n'a joué aucun rôle; on a seulement utilisé ∂G_ν voisin de ∂G .

REMARQUE.

On a prouvé l'existence d'un noyau dans le chapitre III; ce noyau dépend de la fonction g et de la forme g^* dont on affirme seulement l'existence dans le chapitre II. Dans le cas particulier où G est strictement convexe de bord de classe \mathcal{C}^3 , la fonction $g(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y]$ et $g^*(x, y) = 2 \partial \varphi(x)$ conviennent (à cause de la convexité stricte de g), on a alors une formule constructive pour l'équation $\bar{\partial} \alpha = \beta$ lorsque $\bar{\partial} \beta = 0$, ($\beta \in \mathcal{C}_{o, q+1}^\infty(G)$) et le § 5 (ch. II) serait à supprimer.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LIEB, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf strengpseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen* 190 (1970), pp. 6-44.
- [2] GRAUERT, H. und I. LIEB. Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. *Rice Univ. Studies., Complex Analysis*, 1969.
- [3] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [4] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. Van Nostrand, Princeton, 1966.
- [5] ——— L^2 -estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator. *Acta Mathematica* 113 (1965), pp. 91-145.
- [6] RAMIREZ DE, A. E. Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis. *Math. Ann.* 184 (1970), pp. 172-187.
- [7] CHENKIN, G. M. Une représentation intégrale pour des fonctions holomorphes sur un domaine strictement pseudo-convexe et une application (en Russe). *Matem. Sb.* 120 (1969), pp. 611-632.

(Reçu le 21 novembre 1972)

M. Jambon
 Mathématiques
 Faculté des Sciences
 F-34 — Montpellier