Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: §6. Une représentation intégrale sur un domaine strictement pseudo-convexe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

§ 6. Une représentation intégrale sur un domaine strictement pseudo-convexe

Nous conservons les notations utilisées jusqu'ici. Soit γ une $(0, q)$-forme indéfiniment différentiable sur $\bar{G}$. D'après le théorème 7 on a

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$$
$$+ \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) .$$

Toutes les formes intervenant sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $W(B_{nq}, \Omega_{nq}, A_{nq}, C_{nq})$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y. Dans la dernière intégrale échangeons la différentiation et l'intégration.

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y B(y)$$

où $B \in \mathscr{C}^\infty_{(0, q-1)}(G)$.

Pour transformer la deuxième intégrale du second membre, nous avons besoin de

$$\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) = dx\, A_{nq}(x, y) .$$

Nous construisons pour $y \in G$ l'intégrale

$$\int_{\partial G} d_x(\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)) .$$

Pour chaque y fixé, c'est l'intégrale d'une forme d_x exacte qui est donc nulle.

D'autre part

$$d_x[\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)] = d_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)$$
$$+ (-1)^q \gamma(x) \wedge d_x [A_{nq}(x, y)]$$
$$= \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) ,$$

d'où

$$0 = \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) .$$

Et par conséquent

$$\int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y)$$
$$+ (-1)^{q+1} \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y B(y) .$$

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe G de $\mathbf{C}^n$, *avec un bord de classe* $\mathscr{C}^4$, *il existe des doubles formes* $\Omega_{nq}(x, y)$ *et* $A_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^1_{n, n-q-1; o, q}(W)$ *et* $C^1_{n, n-q-2; o, q}(W)$ *sur un ouvert* W *contenant* $\partial G \times G$, *de telle sorte que ce qui suit est valable:*
Si $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{pq}(\bar{G})$, *alors* $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y\right.$$
$$\left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)\right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y)\,.$$

Avec $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$. On rappelle $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$ pour $q = 0$, $\Omega_{nq} = 0$ pour $q > 0$, Ω_{nq} et A_{qn} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y.

Il est clair que pour les domaines G_ν introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si G est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et g une fonction bornée $\mathscr{C}^\infty$ sur G, alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{g(x)}{x - y}\, dx \wedge d\bar{x}, \quad y \in G\,,$$

satisfait l'équation différentielle $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$.

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.