Chapitre II FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

On rappelle $I = (i_1, \ldots i_\nu, \ldots, i_q), i_1 < \ldots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \ldots j_\mu, \ldots, j_{n-q}), j_1 < \ldots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j_\lambda} \wedge dx_{j_\lambda})$$

$$= (n-1)!\left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu}) \right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda = j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda) \right] d\bar{y}_I\,.$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I\,,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\,\varphi\,(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\,\varphi(x)[h.k] = d\{d\,\varphi(x)[h]\}[k]\,.$$

D'après le lemme 1.1 appliqué deux fois, on peut introduire la partie 2-$\mathbf{C}$-linéaire, 1-$\mathbf{C}$-linéaire — 1-antilinéaire, 1-antilinéaire — 1-$\mathbf{C}$-linéaire, 2-antilinéaire de $d \otimes d\, \varphi\, (x)$. On notera

$$d \otimes d\, \varphi(x) = \partial \otimes \partial\, \varphi(x) + \partial \otimes \bar{\partial}\, \varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \partial\, \varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial}\, \varphi(x)\,.$$

On remarquera $\partial \otimes \bar{\partial}\, \varphi\, (x)\, [h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial\varphi\, (x)\, [k.h]$.

Hessien complexe. Définition. La forme quadratique réelle

$$\partial \otimes \bar{\partial}\, \varphi(x)\, [h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial\, \varphi(x)\, [h.k]$$

est appelé le hessien complexe de φ au point x.

Domaine strictement pseudo-convexe. Un domaine G de $\mathbf{C}^n$ est dit strictement pseudo-convexe si pour tout y dans ∂G, il existe un voisinage U de y et une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur U pour laquelle on ait

(1) $G \cap U = \{ x \in U \mid \varphi(x) < 0 \}$ et $\forall x \in \partial G \cap U\, (\varphi(x) = 0)\, d\varphi(x) \neq 0$

(2) $\forall x \in \partial G \cap U,\ \forall w \in \mathbf{C}^n$ avec $|\, w\, | \neq 0$ et $\partial\varphi(x)[w] = 0$

$$\partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)\, [w\,,\, w] > 0 \qquad \text{(condition de Lévi).}$$

Proposition. Soit G un domaine borné strictement pseudo-convexe avec un bord de classe $\mathscr{C}^p\, (p \geqq 2)$, il existe alors dans un voisinage de $\bar{G}$ une fonction réelle φ de classe $\mathscr{C}^p$ pour laquelle on ait

(1) $G = \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi\, (x) < 0 \}$

(2) $d\varphi\, (x) \neq 0$ dans un voisinage de ∂G.

(3) Dans un voisinage de ∂G, φ est strictement plurisousharmonique (c'est-à-dire le hessien complexe de φ est une forme quadratique définie positive).

La démonstration est indiquée en [3]. La compacité de G et la classe $\mathscr{C}^p$ du bord ∂G permettent de trouver une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^p$ avec $d\psi\, (x) \neq 0$ sur ∂G, $G = \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \psi\, (x) < 0 \}$, et vérifiant la condition de Lévi; en prenant ensuite $\varphi = \psi\, e^{A\psi}$ où A est un réel suffisamment grand, on obtient la proposition.

De plus, choisissons une suite strictement monotone de nombres réels positifs ε_ν tendant vers 0 et posons

$$G_\nu = \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi\, (x) < -\, \varepsilon_\nu \}$$

Le domaine G_ν a, au cas où ε_1 est assez petit, les mêmes propriétés que G et on a

$$G_\nu \subset\subset G_{\nu+1} \subset\subset G\,, \quad \bigcup_{\nu \geq 1} G_\nu = G\,.$$

On a des propriétés similaires avec $\tilde{G}_\nu = \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi(x) < \varepsilon_\nu \}$

$$G \subset\subset \tilde{G}_{\nu+1} \subset\subset \tilde{G}_\nu\,.$$

§ 5. Formes différentielles de Ramirez-Chenkin

Nous désirons construire une fonction g satisfaisant aux hypothèses du § 3.1. Pour cela nous avons besoin du lemme:

1. *Lemme 5.1.* Soient G un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbf{C}^n$, Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{C}^n$, $f_x(y)$ une (0, 1) forme de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$, vérifiant $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$. Alors l'équation $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$ a une solution de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$.

Démonstration. On s'appuie sur le théorème 2.2.3, page 107 de [5] avec poids nul. On trouve alors que pour chaque $x \in \Omega$, il existe une solution $u_x(y)$ avec

$$\bar{\partial}_y u_x(y) = f_x(y)\,,$$
$$\| u_x \| \leq e\,[\text{diamètre de } G]^2\, \| f_x \|\,.$$

$\| \; \|$ désignent les normes dans les espaces $L^2_{(o,o)}(G)$ ou $L^2_{(o,1)}(G)$.
$u_x(y) \in H^2_{(o\;o)}(G) \otimes E^2_{(o\;o)}(G)$, où $E^2_{(o,o)}(G)$ est le sous-espace fermé des fonctions holomorphes sur G de $L^2_{o\;o}(G)$ et $E^2_{o\;o}(G)$ son supplémentaire orthogonal.

Soit $C(x, y)$ la projection de $u_x(y)$ sur $E^2_{o\;o}(G)$; on vérifie facilement que $C(x, y)$ ne dépend que de $f_x(y)$ et que la correspondance

$$f_x(y) \xrightarrow{E} C(x, y)$$

est une application linéaire continue (pour chaque x fixé) de $H^2_{(0\;1)}(G)$ dans $L^2_{(0\;1)}(G)$.

Notons E^* l'adjoint de E. Montrons alors que C est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$. Il suffit de le faire au voisinage de chaque point (x_o, y_o). On introduit à cet effet une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support compact dans G telle que $\psi(y) = 1$ dans un voisinage de y_0 et $0 \leqq \varphi \leqq 1$ partout.

La formule de Bochner-Martinelli appliquée à $\psi(y) \times C(x, y)$ donne

$$C(x, y) = K_n \int_G C(x, z)\, \bar{\partial}_z \psi(z) + \psi(z)\, \bar{\partial}_z C(x, z) \wedge B_{no}(z, y) .$$

L'intégrale se décompose en une somme dont l'un des termes porte sur $\bar{\partial}_z C(x, y) = f_x(z)$; ce terme est de classe $\mathscr{C}^p$ (voir lemme 4.2). Il reste à étudier

$$\int_G [Ef_x](z) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z)\, B_{noi}(z, y) \right) \wedge \bigwedge_\lambda d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda = d(x, y) ,$$

où B_{noi} est le coefficient du terme sans $d\bar{z}_i$ dans le noyau B_{no}.

$$d(x, y) = \int_G f_x(z)\, E^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z)\, B_{noi}(z, y) \right) \wedge \bigwedge_\lambda d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda .$$

Sous cette dernière forme on peut dériver par rapport à x sous l'intégrale (on pouvait dériver par rapport à y sous la forme initiale). On vérifie que les limites sont uniformes par rapport à y dans un voisinage convenable de y_0, ce qui permet d'affirmer que les dérivées sont continues par rapport au couple (x, y). $C(x, y)$ est donc de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$.

2. Soit toujours G un domaine borné strictement pseudo-convexe de bord de classe $\mathscr{C}^4$. On a le théorème essentiel de ce chapitre.

THÉORÈME 5.

Il existe un voisinage W de $\partial G \times \bar{G}$ et une fonction $g(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur W pour laquelle on ait

(1) $\quad \bar{\partial}_y g(x, y) = 0 ,$

(2) $\quad g(x, x) = 0 ,$

(3) $\quad x \neq y : \ |g(x, y)| > 0 .$

Nous construisons cette fonction au moyen de la fonction φ de l'introduction et du lemme 1.3 (cette construction est faite dans [7]).

On définit pour x voisin de ∂G et y voisin de $\bar{G}$

(4) $\quad P(x, y) = 2\, \partial\varphi(x)[x - y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x - y, x - y] .$

On remarque qu'on a pris les termes **C**-linéaires ou **C**-bilinéaire du développement de Taylor à l'ordre 2 de $\varphi(y) - \varphi(x)$.

(5) $$\varphi(y) - \varphi(x) = d\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2!} d \otimes d\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3),$$

(5′) $$\varphi(y) - \varphi(x) = \partial\varphi(x)[y-x] + \bar{\partial}\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2}[\partial \otimes \partial\varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial}\varphi(x)][x-y, x-y] + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

On reconnaît dans (5′) $Re\, P(x, y)$ plus le hessien complexe de φ, d'où

(6) $$Re\, P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

La stricte plurisousharmonicité de φ permet d'écrire

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in \partial G, \ \forall y \in \bar{G}, \ \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] \geqq \gamma\, |x-y|^2.$$

D'autre part $\exists \delta < 0$ tel que $0(|x-y|^3) \leqq \gamma/2\, |x-y|^2$ pour $|x-y| \leqq \delta$ d'où

(7) $\forall (x, y) \in \partial G \times \bar{G}$ tels que $|x-y| \leqq \delta$, $Re\, P(x, y) \geqq \gamma/2\, |x-y|^2$.

Soit $h : 0 < h < \gamma\, \delta^2/8$.

L'ouvert $\Omega = \{x, y \mid Re\, P(x, y) > h\}$ contient donc $\partial G \times \bar{G} \cap \{(x, y) \mid -\frac{\delta}{2} \leqq |x-y| \leqq \delta\}$.

Il existe donc des voisinages ouverts U de ∂G, V de $\bar{G}$ et des réels α, β tels que $0 < \alpha < \beta$ pour lesquels on a

(8) $$U \times V \cap \{(x, y) \mid \alpha < |x-y| < \beta\} \subset \{(x, y) \mid Re\, P(x, y) > h\}.$$

Définissons alors une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ de **R** dans **R** telle que $0 \leqq \psi \leqq 1$ partout, $\psi(t) = 0$ pour $t \leqq h/2$, $\psi(t) = 1$ pour $t \geqq h$.

Et sur $U \times V$ on définit

$$A(x, y) = \log P(x, y) \times \psi[Re\, P(x, y)] \quad \text{si} \quad Re\, P(x, y) > 0,$$

$$A(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad Re\, P(x, y) < \frac{h}{2},$$

Il est clair que $A(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ ainsi que $\bar{\partial}_y A(x, y)$ sur $U \times V$ et même sur $\bar{U} \times \bar{V}$.

On introduit enfin

$$f_x(y) = \begin{cases} \bar{\partial}_y A(x, y) & \text{pour} \quad |x-y| < \beta, \\ 0 & \text{pour} \quad |x-y| > \alpha. \end{cases}$$

$f_x(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à (x, y) sur $U \times V$ et de plus $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$. D'après le lemme 5.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées il existe une fonction $C(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U \times V$ telle que $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$.

La fonction

$$g(x, y) = P(x, y)\, e^{C(x,y) - A(x,y)} \quad \text{si} \quad |x-y| < \beta,$$

$$g(x, y) = e^{C(x,y)} \quad \text{si} \quad |x-y| > \alpha,$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U \times V = W$ et vérifie les hypothèses 1), 2), 3) du théorème 5.

On pourra même prendre $V = \tilde{G}_v$ avec les notations de l'introduction pour v assez petit et $U = \tilde{G}_v \backslash G_v$.

3. *Problème de division.*

THÉORÈME 6.

Pour toute fonction g vérifiant les conditions du théorème 5, il existe un voisinage W' de $\partial G \times G$ et $g^* \in \mathscr{C}^2_{1\,0}(W')$ telle que $\bar{\partial}_y g^* = 0$ et $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ sur W'.

Démonstration. On introduit une suite finie d'ouverts

$$\partial G \times G \subset\subset U_n \times V_n \subset\subset \ldots \subset\subset U_1 \times V_1 = U \times V$$

où chaque V_k est un voisinage strictement pseudo-convexe de G.
On pose $\omega_k = U_k \times V_k \cap \{ x_i = y_i \mid k+1 \leq i \leq n \}$.
On cherche alors à démontrer par récurrence sur k

$$\begin{cases} g(x, y) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x, y)(x_i - y_i) \quad \text{sur} \quad \omega_k, \\ g_i \in \mathscr{C}^2_{o\,o}(\omega_k) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0. \end{cases}$$

$k = n$ fournira le résultat du théorème 6.

$k = 1$ se ramène à un problème (trivial) de division à une variable.

Il s'agit de passer de $k - 1$ à k. On suppose donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i), \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et g_i de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_{k-1}.

On procède en deux temps.

a) On prolonge les $g_i(x, y)$ en des $g_i(x, y)$ sur ω_k, ce sera l'objet du lemme 5.2.

b) $h(x, y) = g(x, y) - \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i)$ définie sur ω_k s'annulle pour $x_k = y_k$, donc $h(x, y) = (x_k - y_k) g_k(x, y)$ (division à une variable) et on a g_k de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k et $\bar{\partial}_y g_k(x, y) = 0$.
Donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x, y)(x_i - y_i) \quad \text{sur} \quad \omega_k \quad \text{avec} \quad \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et g_i de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k.

Lemme 5.2. $(x, y) \to \gamma(x, y)$ fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_{k-1} avec $\bar{\partial}_y \gamma(x, y) = 0$ se prolonge en Γ de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k avec $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$.

Démonstration. On introduit

$$\Omega = (U_{k-1} \times V_{k-1}) \cap \{ x_i = y_i \mid k + 1 \leqq i \leqq n \},$$

$$\tilde{\omega} = \{ x, y \in \Omega \mid (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k \ldots x_n) \in \Omega \}.$$

ω_{k-1} est fermé dans Ω, $\tilde{\omega}$ est ouvert dans Ω.

Donc $K_1 = \omega_{k-1} \cap \overline{\omega_k}$ et $K_2 = (\complement_\Omega \tilde{\omega}) \cap \overline{\omega_k}$ sont deux compacts disjoints de Ω. Il existe donc une fonction $\psi(x, y)$ réelle

$$\psi(x, y) = 1 \text{ pour } (x, y) \in K_1,$$
$$\psi(x, y) = 0 \text{ pour } (x, y) \in K_2,$$

$0 \leqq \psi(x, y) \leqq 1$ partout, ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact dans Ω.
γ se prolonge en $\tilde{\gamma}$ sur $\tilde{\omega}$ holomorphe en y par

$$\tilde{\gamma}(x, y) = \gamma(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_n).$$

On recherche alors Γ sous la forme

$$\Gamma(x, y) = \tilde{\gamma}(x, y) \times \psi(x, y) + (x_k - y_k) v(x, y).$$

La condition $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$ entraîne

$$\bar{\partial}_y v(x, y) = \frac{\tilde{\gamma}(x, y)\, \bar{\partial}_y \psi(x, y)}{x_k - y_k} = f_x(y).$$

On a trivialement $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$ et $f_x(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω; le lemme 5.1 appliquée à $f_x(y)$ (mais avec $y \in \mathbf{C}^k$ et $x_1, \ldots, x_n$ comme paramètre) donne une solution v de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω qui prolonge γ en Γ sur ω_k, avec $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$ et Γ de classe $\mathscr{C}^2$.

4. Avec les notations précédentes, compte tenu des théorèmes 5 et 6, $g^* \in \mathscr{C}^2_{0\,1}(W)$ avec W' voisinage de $\partial G \times G$, vérifie les hypothèses du § 3 sur $W = W' \setminus \{(x, y) \mid x = y\}$.

Nous posons maintenant

$$\Omega_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q+1}(g^*),$$

$$\Omega_{nq} \in \mathscr{C}^1_{(n, n-q-1\,;\, 0, q)}(W), \quad \bar{\partial}_y \Omega_{nq}(x, y) = 0.$$

Il résulte du théorème 2 ($q=0$) et du théorème 3 ($q \geqq 1$) que si B_{nq} désigne à nouveau le noyau de Bochner-Martinelli:

THÉORÈME 7.

Il existe des doubles formes A_{nq} et C_{nq} dans $\mathscr{C}^1_{(n, n-q-2\,;\, o, q)}(W)$ et $\mathscr{C}^1_{(n, n-q-1\,;\, o, q-1)}(W)$ telles que

$$B_{nq}(x, y) = \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y)$$

Les formes du second membre sont appelées *formes de Ramirez-Chenkin.*

§ 6. Une représentation intégrale sur un domaine strictement pseudo-convexe

Nous conservons les notations utilisées jusqu'ici. Soit γ une $(0, q)$-forme indéfiniment différentiable sur $\bar{G}$. D'après le théorème 7 on a

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) .$$

Toutes les formes intervenant sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $W(B_{nq}, \Omega_{nq}, A_{nq}, C_{nq})$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y. Dans la dernière intégrale échangeons la différentiation et l'intégration.

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y B(y)$$

où $B \in \mathscr{C}^\infty_{(0, q-1)}(G)$.

Pour transformer la deuxième intégrale du second membre, nous avons besoin de

$$\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) = dx\, A_{nq}(x, y) .$$

Nous construisons pour $y \in G$ l'intégrale

$$\int_{\partial G} d_x(\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)) .$$

Pour chaque y fixé, c'est l'intégrale d'une forme d_x exacte qui est donc nulle.

D'autre part

$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)] &= d_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) \\ &\qquad + (-1)^q \gamma(x) \wedge d_x[A_{nq}(x, y)] \\ &= \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) , \end{aligned}$$

d'où

$$0 = \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) .$$

Et par conséquent

$$\int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y B(y) .$$

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe G de $\mathbf{C}^n$, avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$, il existe des doubles formes $\Omega_{nq}(x, y)$ et $A_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^1_{n, n-q-1; o, q}(W)$ et $C^1_{n, n-q-2; o, q}(W)$ sur un ouvert W contenant $\partial G \times G$, de telle sorte que ce qui suit est valable:
Si $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{pq}(\bar{G})$, alors $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y \right.$$

$$\left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)\right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y) .$$

Avec $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$. On rappelle $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$ pour $q = 0$, $\Omega_{nq} = 0$ pour $q > 0$, Ω_{nq} et A_{qn} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y.

Il est clair que pour les domaines G_ν introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si G est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et g une fonction bornée $\mathscr{C}^\infty$ sur G, alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \; y \in G ,$$

satisfait l'équation différentielle $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$.

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.