

Chapitre Premier FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE PREMIER

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

§ 2. FORME DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

Sur un ouvert W de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, soit f^* un n -uplet de formes de $\mathcal{C}_{(1,0;0,0)}^2(W)$, $f^* = \{f_v^*\}_{1 \leq v \leq n}$.

Pour chaque v on définit $f_v(x, y) = f_v^*(x, y) [x-y]$ et on suppose que chaque fonction $f_v(x, y)$ ainsi définie ne s'annule pas sur W .

Définition 1.

$$D_q(f^*) = \frac{f_1^*}{f_1} \wedge \bar{\partial}_y \left(\frac{f_2^*}{f_2} \right) \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_y \left(\frac{f_q^*}{f_q} \right) \wedge \bar{\partial}_x \left(\frac{f_{1+q}^*}{f_q} \right) \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_x \left(\frac{f_n^*}{f_n} \right)$$

s'appelle la forme différentielle de Cauchy-Fantappiè (C.F. forme) d'ordre q sur W , associée à f^* .

THÉORÈME 1. $D_q(f^*)$ est indépendant de f_1^* .

Démonstration. $D_q(f^*) \in \mathcal{C}_{(n, n-q; 0, q-1)}^1(W)$. On va donc faire agir $D_q(f^*)$ sur $2n-1$ vecteurs et on mettra en évidence une simplification par $f_1^* [x-y]$.

On pose $X_v \in E$ pour $1 \leq v \leq 2n-q$,

$X_v \in F$ pour $2n-q+1 \leq v \leq 2n-1$,

avec les notations du § 1 (ici $E=F=\mathbf{C}^n$).

On note $\xi_v = y$ pour $2 \leq v \leq q$,

$\xi_v = x$ pour $q+1 \leq v \leq n$,

σ_{2n-1} est le groupe symétrique d'ordre $2n-1$.

$I = (i_{q+1}, \dots, i_n)$ un arrangement à $(n-q)$ éléments de $\{1, \dots, 2n-q\}$,

$J = (j_2, \dots, j_q)$ une permutation à $(q-1)$ éléments de $\{2n-q+1, \dots, 2n-1\}$,

$K = \{k_1, \dots, k_n\}$, $k_1 < \dots < k_n$ un ensemble tel que $K \cap I = \{1, \dots, 2n-q\}$, $K \cap J = \emptyset$.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*) [X_1, \dots, X_{2n-1}] = \sum_{I, J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq v \leq q \\ q+1 \leq v \leq n}} \varepsilon_\sigma \frac{f_1^* [X_{\sigma(1)}]}{f_1^* [x-y]} \prod_{v=1}^n \bar{\partial}_{\xi v} \left[\frac{f_v^* [X_{\sigma(2v+1)}]}{f_v^* [x-y]} \right] (X_{\sigma(2v)}).$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n -C-linéaire alternée de X_{k_1}, \dots, X_{k_n} ; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de \mathbf{C}^n dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma(1) \neq k_1 \exists v$ avec $X_{\sigma(2v+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce v on a

$$\bar{\partial}_{\xi v} \left[\frac{f_v^* [X_{\sigma(2v+1)}]}{f_v^* [x-y]} \right] = 0.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^* [x-y]}{f_1^* [x-y]} = 1.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. UNE FORMULE D'HOMOTOPIE

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq v \leq r$, soit $f_v^* \in \mathcal{C}_{(p_v, q_v; r_v, s_v)}^{k_v}(W)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(f_1^*, \dots, f_r^*) = \left(\wedge^{\alpha_1} f_1^* \right) \wedge \dots \wedge \left(\wedge^{\alpha_r} f_r^* \right).$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathcal{C}_{(1, 0; 0, 0)}^2(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y) [x-y]$ ne s'annule pas sur W .

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1, q, r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_v^* sont égales.

Remarque.
$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r} \left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f} \right)$$

car
$$\bar{\partial}_y \frac{f^*}{f} = \bar{\partial}_y \left(\frac{1}{f} \right) \wedge f^* + \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^* .

Soit maintenant $g^* \in \mathcal{C}_{(1,0;0,0)}^2(W)$ vérifiant de plus $\bar{\partial}_y g^* = 0$.

On définit comme pour f^* , $g(x, y) = g^*(x, y) [x - y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$\begin{aligned} & D_{1,q,r,s} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &= \frac{q}{r+q} \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ & - \frac{r}{r+q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ & + \frac{r}{r+q} D_{1,q,r-1,s+1} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geq 1$ et $r \geq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^* / f$ et $G^* = g^* / g$.

D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différenciée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$\begin{aligned}
 D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) &= D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ \dots \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$\begin{aligned}
 D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différenciée

$$\begin{aligned}
 &\bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar{\partial}_x G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \dots \\
 &+ \dots \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$\begin{aligned}
 &D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\ + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Si $q \geq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f)) \text{ (par définition).}$$

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right)\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right) \\ + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \dots \\ - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\
 & + D_{1,r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g} \right).
 \end{aligned}$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*),$

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^r D_{1,1,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^r a_k D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

$$C(f^*, g^*) =$$

$$\sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).

§ 4. LA FORMULE INTÉGRALE DE BOCHNER-MARTINELLI GÉNÉRALISÉE

On supposera désormais que \mathbf{C}^n est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x} - \bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x} - \bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, \bar{u}^* désigne la forme \mathbf{C} -linéaire

$$u^* : h \rightarrow \langle h . u \rangle .$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0, q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathcal{C}_{(n, n-q-1; 0, q)}^\infty(W) .$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n, -1} = B_{n, n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n, q-1}$, $0 \leq q \leq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q) \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q, r+1} \left(\bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right) \right) = 0 \quad \text{avec} \quad q + r + 1 = n .$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_x D_{1, q, r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right) \\ = q (-1)^q D_{1, q-1, 1, r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_y D_{1, q-1, r+1} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right) \\ = (1+r) (-1)^{q-1} D_{1, q-1, 1, r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right) . \end{aligned}$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-q-1} \leq n}} [(\bar{x}_k - \bar{y}_k) dx_k \wedge \bigwedge_{v=1}^q (d\bar{y}_{i_v} \wedge dx_{i_v}) \wedge (d\bar{x}_{j_\mu} \wedge dx_{j_\mu})] |x - y|^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-q-1} \leq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \dots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x} - \bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans \mathbf{C}^n avec une frontière ∂G de classe \mathcal{C}^1 . On prend l'orientation naturelle de \mathbf{C}^n , c'est-à-dire $x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n$ avec $x_v = x'_v + ix''_v$ est un système de coordonnées de \mathbf{R}^{2n} orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathcal{C}_{0, q+1}^\infty(G)$, γ bornée sur G . Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathcal{C}_{(0, q)}^\infty(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$|B_{nq}(x, y)| = 0 \left(\frac{1}{|x - y|} 2n - 1 \right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_0 \in G$; soit f fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que $0 \leq f \leq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_0 , f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset \subset K_2 \subset \subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)] \gamma(x) B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x) \gamma(y) B_{nq}(x, y).$$

Le premier terme est de classe \mathcal{C}^∞ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_0) sur un domaine où le dénominateur ne s'annule pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_0

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_0} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \dots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_0 dans G .

3. THÉORÈME 4.

Soit $\gamma \in \mathcal{C}_{0q}^\infty(\bar{G})$. Alors pour chaque $y \in G$

$$\begin{aligned} \gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} & \left[\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \right. \\ & \left. - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \right]. \end{aligned}$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1, q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x [\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x [\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n, (q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n, q-1} = B_{n, -1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{x \in G \mid |x - y| \leq \varepsilon\} \subset \subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\begin{aligned} \int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \\ = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \end{aligned}$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \rightarrow 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0 \left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}} \right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^n \bar{t}_k dt_k \wedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^n (d\bar{t}_\lambda \wedge dt_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i t''_\lambda$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) &= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^n \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k dt'_k + t'_k dt''_k) \wedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^n dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda, \end{aligned}$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k dt'_k + t''_k dt''_k) = - \sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda dt'_\lambda + t''_\lambda dt''_\lambda \quad \text{sur } |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^n (-t''_k dt'_k + t'_k dt''_k) \wedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^n dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

= aire de la sphère de rayon 1 en dimension $2n = \frac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_0 \in G$; nous choisissons une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ avec $0 \leq f \leq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_0 .

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\gamma(x) + f\gamma(x)$.

La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)\gamma$ donne le théorème pour $(1-f)\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.

On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x) dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \quad \gamma_I(y) d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[- \int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y) - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) dx_I \wedge B_{nq-1}(x, y) \right].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n, q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w \in G} \gamma_I(x) d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x, y) = \int_{x \in G} \sum_h \frac{\partial \gamma_I}{\partial \bar{x}_k} d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I B_{nq-1}(x, y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x, y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma_I(x) d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x, y) \\ &= \int_{x \in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{v=1}^q \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{iv}} d\bar{y}_{iv} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{iv} - \bar{y}_{iv}) dx_{iv} \\ & \quad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq v}}^q (d\bar{y}_{i\lambda} \wedge dx_{i\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} \\ &= (n-1)! \left[\int_{x \in G} \sum_{v=1}^q \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{iv}} d\bar{x}_{iv} \wedge (\bar{x}_{iv} - \bar{y}_{iv}) dx_{iv} \right. \\ & \quad \left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq v}}^q d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda \right] \wedge d\bar{y}_I. \end{aligned}$$

On rappelle $I = (i_1, \dots, i_\nu, \dots, i_q)$, $i_1 < \dots < i_q$,
 et on a posé $J = (j_1, \dots, j_\mu, \dots, j_{n-q})$, $j_1 < \dots < j_{n-q}$,
 de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\begin{aligned} & \int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y) \\ &= (n-1)! (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j_\mu}} d\bar{x}_{j_\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j_\mu} - \bar{y}_{j_\mu}) \\ & \quad dx_{j_\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^q (d\bar{y}_{i_\nu} \wedge dx_{i_\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j_\lambda} \wedge dx_{j_\lambda}) \\ &= (n-1)! \left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j_\mu}} d\bar{x}_{j_\mu} \wedge dx_{j_\mu} (\bar{x}_{j_\mu} - \bar{y}_{j_\mu}) \right. \\ & \quad \left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq j_\mu}}^n (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda) \right] d\bar{y}_I. \end{aligned}$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y) d\bar{y}_I = - (2\pi i)^n \gamma_I(y) d\bar{y}_I,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

CHAPITRE II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de \mathbf{C}^n ; si φ est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 sur Ω , $d \otimes d \varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d \varphi(x) [h.k] = d \{ d \varphi(x) [h] \} [k].$$