

§1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Martinelli généralisée, mais le noyau n'est pas holomorphe (contrairement au noyau de Cauchy pour $n = 1$). Un théorème d'homotopie (§ 3) permet de nous ramener à un noyau dont certains termes sont holomorphes; pour obtenir ce dernier, nous devons prouver l'existence d'une fonction g convenable (th. 5, ch. II). Après quoi, on obtient assez facilement les résultats cherchés.

Je me suis inspiré pour ce travail de l'article de Ingo-Lieb [1], mais j'ai été amené à remanier profondément certaines notations et démonstrations (notamment aux § 2 et 5) dans un but de simplification.

§ 1. PRÉLIMINAIRES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES

E est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{C} .

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1.

1.1. Définition. Une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert Ω de E , est une application de Ω dans l'espace vectoriel E^* des formes complexes \mathbf{R} -linéaires sur E . $\forall x \in \Omega$, $\omega(x)$ est une forme \mathbf{R} -linéaire sur E à valeur dans \mathbf{C} .

Lemme 1.1. Toute forme complexe \mathbf{R} -linéaire sur E est somme d'une forme antilinéaire et d'une forme \mathbf{C} -linéaire et cela de façon unique:

$$l(z) = \frac{1}{2} [l(z) - i l(iz)] + \frac{1}{2} [l(z) + i l(iz)].$$

Exemple. Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$,

$$\forall x \in \Omega, df(x) = \partial f(x) + \bar{\partial} f(x) \quad \text{ou} \quad df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

$\partial f(x)$ désigne la partie \mathbf{C} -linéaire de $df(x)$.

$\bar{\partial} f(x)$ désigne la partie antilinéaire de $df(x)$.

1.2. Ecriture dans une base. Si E est muni d'une base, $E \simeq \mathbf{C}^n$,

$$x \in \mathbf{C}^n: x = (x_1, \dots, x_n).$$

Définition. dx_v , respectivement $d\bar{x}_v$, désigne la forme \mathbf{C} -linéaire, respectivement antilinéaire, qui à x fait correspondre x_v , respectivement \bar{x}_v .

Toute forme différentielle de degré 1 sur Ω s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu}(x) dx_{\mu} + \sum \omega'_{\mu}(x) d\bar{x}_{\mu}.$$

Par exemple,

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_v} dx_v, \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_v} d\bar{x}_v.$$

2. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE TYPE (p, q) .

2.1. *Définition.* $\binom{p, q}{\wedge} E^*$ est l'espace vectoriel sur \mathbf{C} engendré par l'ensemble des produits extérieurs de p formes \mathbf{C} -linéaires et q formes antilinéaires.

C'est le sous-espace vectoriel de l'espace des $(p+q)$ \mathbf{R} -linéaires formes alternées qui vérifient $f(\lambda X_1, \dots, \lambda X_{p+q}) = \lambda^p \bar{\lambda}^q f(X_1 \dots X_{p+q})$.

Remarques: $p \leq n, q \leq n$ ($n = \dim E$).

2.2. Une forme différentielle de type (p, q) , de classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \infty$) sur Ω ouvert de E est une application de classe \mathcal{C}^k de Ω dans $\binom{p, q}{\wedge} E^*$. On appellera $\mathcal{C}_{p, q}^k(\Omega)$ l'espace vectoriel sur \mathbf{C} de ces formes.

2.3. *Représentation dans une base.* D'après (1.2), si $\omega \in \mathcal{C}_{p, q}^k(\Omega)$, $x \in \Omega$, on a

$$\omega(x) = \sum_{IJ} \omega_{IJ}(x) dx_I \wedge d\bar{x}_J,$$

où $dx_I = dx_{i_1} \dots dx_{i_p}, \quad i_1 < \dots < i_p,$

$$d\bar{x}_J = d\bar{x}_{j_1} \dots d\bar{x}_{j_q}, \quad j_1 < \dots < j_q,$$

$\omega_{IJ}(x)$ est une application de classe \mathcal{C}^k de Ω dans \mathbf{C} .

3. DOUBLE FORME DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE.

(E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbf{C}).

3.1. Soit W un ouvert de $E \times F$, une double forme différentielle de type $(p, q; r, s)$ de classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \infty$) sur W est une application de classe \mathcal{C}^k de W dans $\binom{p, q}{\wedge} E^* \otimes \binom{r, s}{\wedge} F^*$.

On appellera $\mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(W)$ l'espace vectoriel ainsi défini.

Si on note (x, y) les éléments de W , on définit pour $\omega \in \mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(\Omega)$ $\deg_x \omega = p + q$, $\deg_y \omega = r + s$.

3.2. Représentation dans une base

$$\omega(x, y) = \sum_{IJKL} \omega_{IJKL}(x, y) dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

avec des notations similaires à celles du § 0.2.3 et par définition

$$dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L = (dx_I \wedge d\bar{x}_J) \otimes (dy_K \wedge d\bar{y}_L).$$

3.3. Produit extérieur de formes doubles.

Soient $u \in \mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(W)$, $v \in \mathcal{C}_{p',q';r',s'}^k(W)$.

On définit $u \wedge v$ comme un élément de $\mathcal{C}_{p+p',q+q';r+r',s+s'}^k(W)$ par

$$\begin{aligned} u \wedge v(x, y) [X_1, \dots, X_{p+q+p'+q'}, Y_1, \dots, Y_{r+s+r'+s'}] \\ = \sum_{I,J,K,L} \varepsilon_{IJ} \varepsilon_{KL} u(x, y) [X_I, Y_K] v(x, y) [X_J, Y_L], \end{aligned}$$

où les notations ont le sens suivant:

$$\begin{cases} I = \{i_1 < \dots < i_{p+q}\} \\ J = \{j_1 < \dots < j_{p'+q'}\} \\ IJ = \{i_1, \dots, i_{p+q}, j_1, \dots, j_{p'+q'}\} \end{cases} \text{ est une permutation de } \{1, \dots, p+q+p'+q'\},$$

$$\begin{cases} K = \{k_1 < \dots < k_{r+s}\} \\ L = \{l_1 < \dots < l_{r'+s'}\} \\ KL = \{k_1, \dots, k_{r+s}, l_1, \dots, l_{r'+s'}\} \end{cases} \text{ est une permutation de } \{1, \dots, r+s+r'+s'\},$$

X_I signifie $(X_{i_1}, \dots, X_{i_{p+q}})$, de même Y_K , X_J , Y_L .

Propriétés. $u \wedge v = (-1)^{[\deg_x u \cdot \deg_x v + \deg_y u \cdot \deg_y v]} v \wedge u$.

Ainsi $dx_i \cdot dy_j = dx_i \wedge dy_j$. Mais $dx_i \wedge dy_j = dy_j \wedge dx_i$.

Le produit extérieur est évidemment distributif par rapport à l'addition et associatif.

4. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE.

4.1. $\omega \in \mathcal{C}_{(p,q;r,s)}^k(W)$, $k \geq 1$.

$\partial_x \omega$ est un élément de $\mathcal{C}_{(p+1,q;r,s)}^{k-1}(W)$ défini par

$$\begin{aligned} & [\partial_x \omega(x, y)] [X_1, \dots, X_{p+q+1}, Y_1, \dots, Y_{p+s}] \\ &= \sum_{k=1}^{p+q+1} (-1)^{k-1} \partial_x \{ \omega(x, y) [X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{p+1}, \\ & \qquad \qquad \qquad Y_1, \dots, Y_{p+s}] \} [X_k]. \end{aligned}$$

Définitions similaires pour $\bar{\partial}_x, \partial_y, \bar{\partial}_y$.

4.2. Propriétés $\partial_x \partial_x \omega = 0, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_x \omega = 0, \partial_x \bar{\partial}_x \omega = -\bar{\partial}_x \partial_x \omega$.

Les mêmes pour y et aussi

$$\bar{\partial}_x \bar{\partial}_y = \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x \dots \partial_x (\alpha \wedge \beta) = (\partial_x \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \partial_x \beta \dots$$

5. NORME SUR $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$.

Pour chaque $(x, y) \in W$ on définit

$$|\omega(x, y)| = \frac{1}{(p+q)!(r+s)!} \sup_{\substack{|X_i| \leq 1 \\ |Y_i| \leq 1}} |\omega(x, y) [X_1 \dots X_{p+q}, Y_1 \dots Y_{r+s}]|$$

Si $\sup_{(x,y) \in W} |\omega(x, y)| < \infty$, ω est dite *bornée* et on définit $|\omega| = \sup_{(x,y) \in W} |\omega(x, y)|$. L'ensemble des formes bornées est noté $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$.

On obtient une norme sur $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$. Cette norme munit

$\bigoplus_{(p,q;r,s)} \mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$ d'une structure d'Algèbre normée car

$$|\alpha \wedge \beta| \leq |\alpha| |\beta|.$$