§1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Martinelli généralisée, mais le noyau n'est pas holomorphe (contrairement au noyau de Cauchy pour $n = 1$). Un théorème d'homotopie (§ 3) permet de nous ramener à un noyau dont certains termes sont holomorphes; pour obtenir ce dernier, nous devons prouver l'existence d'une fonction g convenable (th. 5, ch. II). Après quoi, on obtient assez facilement les résultats cherchés.

Je me suis inspiré pour ce travail de l'article de Ingo-Lieb [1], mais j'ai été amené à remanier profondément certaines notations et démonstrations (notamment aux § 2 et 5) dans un but de simplification.

§ 1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$.

1. Formes différentielles de degré 1.

1.1. Définition. Une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert Ω de E, est une application de Ω dans l'espace vectoriel E^* des formes complexes $\mathbf{R}$-linéaires sur E. $\forall x \in \Omega$, $\omega(x)$ est une forme $\mathbf{R}$-linéaire sur E à valeur dans $\mathbf{C}$.

Lemme 1.1. Toute forme complexe $\mathbf{R}$-linéaire sur E est somme d'une forme antilinéaire et d'une forme $\mathbf{C}$-linéaire et cela de façon unique:

$$l(z) = \frac{1}{2}\left[l(z) - i\,l(iz)\right] + \frac{1}{2}\left[l(z) + i\,l(iz)\right].$$

Exemple. Si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, $f : \Omega \to \mathbf{C}$,

$$\forall x \in \Omega\,,\ df(x) = \partial f(x) + \bar{\partial} f(x) \qquad \text{ou} \qquad df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

$\partial f(x)$ désigne la partie $\mathbf{C}$-linéaire de $df(x)$.

$\bar{\partial} f(x)$ désigne la partie antilinéaire de $df(x)$.

1.2. Ecriture dans une base. Si E est muni d'une base, $E \simeq \mathbf{C}^n$,

$$x \in \mathbf{C}^n : \quad x = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Définition. dx_ν, respectivement $d\bar{x}_\nu$, désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire, respectivement antilinéaire, qui à x fait correspondre x_ν, respectivement $\bar{x}_\nu$.

Toute forme différentielle de degré 1 sur Ω s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu(x)\, dx_\mu + \sum \omega'_\mu(x)\, d\bar{x}_\mu .$$

Par exemple,

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu , \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_\nu} d\bar{x}_\nu .$$

2. Formes différentielles de type $(p . q)$.

2.1. Définition. $\overset{(p,q)}{\wedge} E^*$ est l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ engendré par l'ensemble des produits extérieurs de p formes $\mathbf{C}$-linéaires et q formes antilinéaires.

C'est le sous-espace vectoriel de l'espace des $(p+q)$ $\mathbf{R}$-linéaires formes alternées qui vérifient $f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_{p+q}) = \lambda p\, \bar{\lambda} q\, f(X_1 \ldots X_{p+q})$.

Remarques: $p \leqq n$, $q \leqq n$ $(n = \dim E)$.

2.2. Une forme différentielle de type (p, q), de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqq k \leqq \infty)$ sur Ω ouvert de E est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans $\overset{(p,r)}{\wedge} E^*$. On appellera $\mathscr{C}^k_{p,q}(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de ces formes.

2.3. Représentation dans une base. D'après (1.2), si $\omega \in \mathscr{C}^k_{p,q}(\Omega)$, $x \in \Omega$, on a

$$\omega(x) = \sum_{IJ} \omega_{IJ}(x)\, dx_I \wedge d\bar{x}_J ,$$

où $\quad dx_I = dxi_1 \ldots dxi_p , \quad i_1 < \ldots < i_p ,$

$\quad d\bar{x}_J = d\bar{x}j_1 \ldots d\bar{x}j_q , \quad j_1 < \ldots < j_q ,$

$\quad \omega_{IJ}(x)$ est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans $\mathbf{C}$.

3. Double forme différentielle extérieure.

(E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{C}$).

3.1. Soit W un ouvert de $E \times F$, une double forme différentielle de type $(p, q; r, s)$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqq k \leqq \infty)$ sur W est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de W dans $\overset{(p,q)}{\wedge} E^* \otimes \overset{(r,s)}{\wedge} F^*$.

On appellera $\mathscr{C}^k_{p,q;r,s}(W)$ l'espace vectoriel ainsi défini.

Si on note (x,y) les éléments de W, on définit pour $\omega \in \mathscr{C}^k_{p,q;r,s}(\Omega)$ $\deg_x \omega = p + q$, $\deg_y \omega = r + s$.

3.2. Représentation dans une base

$$\omega(x,y) = \sum_{IJKL} \omega_{IJKL}(x,y)\, dx_I \wedge d\bar{x}_J \,.\, dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

avec des notations similaires à celles du § 0.2.3 et par définition

$$dx_I \wedge d\bar{x}_J \,.\, dy_K \wedge d\bar{y}_L = (dx_I \wedge d\bar{x}_J) \otimes (dy_K \wedge d\bar{y}_L)\,.$$

3.3. Produit extérieur de formes doubles.

Soient $u \in \mathscr{C}^k_{p,q;r,s}(W)$, $v \in \mathscr{C}^k_{p',q';r',s'}(W)$.

On définit $u \wedge v$ comme un élément de $\mathscr{C}^k_{p+p',q+q';r+r',s+s'}(W)$ par

$$\begin{aligned} u \wedge v(x,y)&[X_1, \ldots, X_{p+q+p'+q'}, Y_1, \ldots, Y_{r+s+r'+s'}] \\ &= \sum_{I,J,K,L} \varepsilon_{IJ}\, \varepsilon_{KL}\, u(x,y)[X_I, Y_K]\, v(x,y)[X_J, Y_L]\,, \end{aligned}$$

où les notations ont le sens suivant:

$$\begin{cases} I = \{i_1 < \ldots < i_{p+q}\} \\ J = \{j_1 < \ldots < j_{p'+q'}\} \\ IJ = \{i_1, \ldots, i_{p+q}, j_1, \ldots, j_{p'+q'}\} \quad \text{est une permutation de } \{1, \ldots, p+q+p'+q'\}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \{k_1 < \ldots < k_{r+s}\} \\ L = \{l_1 < \ldots < l_{r'+s'}\} \\ KL = \{k_1, \ldots, k_{r+s}, l_1, \ldots, l_{r'+s'}\} \quad \text{est une permutation de } \{A, \ldots, r+s+r'+s'\}\,, \end{cases}$$

X_I signifie $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p+q}})$, de même Y_K, X_J, Y_L.

Propriétés. $u \wedge v = (-1)^{[\deg_x u.\deg_x v + \deg_y u.\deg_y v]}\, v \wedge u$.

Ainsi $dx_i \,.\, dy_j = dx_i \wedge dy_j$. Mais $dx_i \wedge dy_j = dy_j \wedge dx_i$.

Le produit extérieur est évidemment distributif par rapport à l'addition et associatif.

4. Différentielle extérieure.

4.1. $\omega \in \mathscr{C}^k_{(p,q;\, r,s)}(W)$, $k \geqq 1$.
$\partial_x \omega$ est un élément de $\mathscr{C}^{k-1}_{(p+1,q;\, r,s)}(W)$ défini par

$$[\partial_x \omega(x,y)]\ [X_1, \ldots, X_{p+q+1}, Y_1, \ldots Y_{p+s}]$$
$$= \sum_{k=1}^{p+q+1} (-1)^{k-1}\, \partial_x \{\, \omega(x,y)\, [X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_{p+1},$$
$$Y_1, \ldots, Y_{p+s}]\}\ [X_k]\,.$$

Définitions similaires pour $\bar{\partial}_x$, ∂_y, $\bar{\partial}_y$.

4.2. Propriétés $\partial_x \partial_x \omega = 0$, $\bar{\partial}_x \bar{\partial}_x \omega = 0$ $\partial_x \bar{\partial}_x \omega = -\bar{\partial}_x \partial_x \omega$.
Les mêmes pour y et aussi

$$\bar{\partial}_x \bar{\partial}_y = \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x \ldots \partial_x(\alpha \wedge \beta) = (\partial_x \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg_x \alpha}\, \alpha \wedge \partial_x \beta \ldots$$

5. Norme sur $\mathscr{B}\mathscr{C}^k_{(p,q;\, r,s)}(W)$.

Pour chaque $(x, y) \in W$ on définit

$$|\,\omega(x,y)\,| = \frac{1}{(p+q)\,!\,(r+s)\,!} \sup_{\substack{|X_i| \leq 1 \\ |Y_i| \leq 1}} |\,\omega(x,y)\,[X_1 \ldots X_{p+q}, Y_1 \ldots Y_{r+s}]\,|$$

Si $\sup\limits_{(x,y) \in W} |\,\omega(x,y)\,| < \infty$, ω est dite *bornée* et on définit $|\,\omega\,| =$ $= \sup\limits_{(x,y)\in W} |\,\omega(x,y)\,|$. L'ensemble des formes bornées est noté $\mathscr{B}\mathscr{C}^k_{(p,q;\, r,s)}(W)$.
On obtient une norme sur $\mathscr{B}\mathscr{C}^k_{(p,q;\, r,s)}(W)$. Cette norme munit $\bigoplus\limits_{(p,q;\, r,s)} \mathscr{B}\mathscr{C}^k_{(p,q;\, r,s)}(W)$ d'une structure d'Algèbre normée car

$$|\,\alpha \wedge \beta\,| \leqq |\,\alpha\,|\ \ |\,\beta\,|\,.$$