**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 18 (1972)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TABLE DES 2-RANG, 4-RANG ET 8-RANG DU 2-GROUPE DES CLASSES D'IDÉAUX AU SENS RESTREINT DE $Q(\sqrt{m})$ m ÉTANT UN ENTIER RELATIF SANS FACTEUR CARRÉ TEL QUE 1 < |m| < 10000

**Autor:** Bouvier, Lyliane

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-45359

# TABLE DES 2-RANG, 4-RANG ET 8-RANG DU 2-GROUPE DES CLASSES D'IDÉAUX AU SENS RESTREINT DE $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ $m$ ÉTANT UN ENTIER RELATIF SANS FACTEUR CARRÉ TEL QUE $1 < |m| < 10\,000$

par Lyliane Bouvier

Cette table a été établie en utilisant les méthodes de détermination du 4-rang et du 8-rang du 2-groupe des classes au sens restreint d'une extension quadratique de $\mathbf{Q}$ exposées par L. Redei et H. Reichardt dans [3], [4], [5] et [6], méthodes dont je résume ci-dessous les étapes essentielles. Les calculs numériques ont été effectués par l'ordinateur IBM 40-65 de Grenoble.

Soit $m$ un entier relatif sans facteur carré, on note $k$ l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ de $\mathbf{Q}$ et $D$ son discriminant. Soit $\mathscr{H}$ le sous-groupe du groupe des classes d'idéaux au sens restreint engendré par les éléments dont l'ordre est une puissance de 2, $\mathscr{H}$ est encore appelé le 2-groupe des classes d'idéaux au sens restreint. On appelle $2^n$-rang de $\mathscr{H}$ — on le désigne par $R_n$ — la dimension du $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel $\mathscr{H}^{2n-1}/\mathscr{H}^{2n}$ — cf. [1] —, c'est aussi le nombre de composantes d'ordre supérieur ou égal à $2^n$ qui interviennent dans une décomposition de $\mathscr{H}$ en produit direct de sous-groupes cycliques. On remarque alors que le nombre de sous-groupes d'ordre 2 de $\mathscr{H}$ qui sont contenus dans un sous-groupe cyclique d'ordre $\geqslant 2^n$ de $\mathscr{H}$, est égal à $2^{R_n} - 1$. Par suite, $\mathscr{H}$ étant isomorphe à son groupe dual, on montre que le nombre d'extensions quadratiques non ramifiées de $k$ qui sont contenues dans une extension non ramifiée cyclique de degré $2^n$ de $k$ est égal à $2^{R_n} - 1$. C'est en déterminant ce nombre pour $n = 2$ et $n = 3$ que l'on déterminera le 4-rang et le 8-rang de $\mathscr{H}$.

L'ensemble des extensions quadratiques non ramifiées de $k$ est l'ensemble des extensions $\mathbf{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ où $D_1$ et $D_2$ sont des nombres discriminants d'extensions quadratiques de $\mathbf{Q}$ (i.e.: $D_i \equiv 1 \pmod 4$ ou $D_i \equiv 8 \pmod{16}$ ou $D_i \equiv 12 \pmod{16}$ pour $i = 1, 2$) tels que $D_1 D_2 = D$ et que $D_i \neq 1$ pour $i = 1, 2$.

*Définition 1:* On appelle *D-décomposition* un couple $(D_1, D_2)$ d'entiers relatifs tels que $D_1$ et $D_2$ soient des nombres discriminants d'extensions quadratiques de $\mathbf{Q}$ et que $D_1 D_2 = D$.

En identifiant les couples $(D_1, D_2)$ et $(D_2, D_1)$, on voit que le nombre de $D$-décompositions est égal à $2^{R1}$. La $D$-décomposition $(1, D)$ est appelée $D$-décomposition triviale.

*Définition 2:* Une $D$-décomposition $(D_1, D_2)$ non triviale est appelée *D-décomposition de n-ième espèce* ($n$ entier $> 1$) si et seulement si $\mathbf{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ est contenue dans une extension non ramifiée cyclique de degré $2^n$ de $k$.

Par convention, la $D$-décomposition $(1, D)$ est considérée comme une $D$-décomposition de n-ième espèce, quel que soit $n > 1$. On voit alors que le nombre de $D$-décomposition de n-ième espèce est égal à $2^{Rn}$.

Pour déterminer $R_2$ (resp. $R_3$) il suffit donc de dénombrer les $D$-décompositions de $2^e$-espèce (resp. $3^e$-espèce). Pour cela nous allons utiliser la propriété caractéristique suivante démontrée par H. Reichardt dans [6].

*Définition 2': Soit n un entier naturel* $> 1$, *une D-décomposition non triviale* $(D_1, D_2)$ *est une D-décomposition de n-ième espèce si et seulement si* $\mathbf{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ *est contenue dans une extension non ramifiée cyclique de degré* $2^{n-1}$ *de k, dans laquelle tout idéal premier de k divisant D est totalement décomposé.*

Dans le cas $n = 2$, nous obtenons en corollaire la proposition suivante:

*Proposition 1:* Une $D$-décomposition non triviale $(D_1, D_2)$ est une $D$-décomposition de $2^e$-espèce si et seulement si $\left(\frac{D_1}{q}\right) = +1$ quel que soit $q$ premier divisant $D_2$ et $\left(\frac{D_2}{q}\right) = +1$ quel que soit $q$ premier divisant $D_1$ (le symbole $\left(\frac{}{}\right)$ désignant le symbole de Legendre-Jacobi-Kronecker).

Or si $(D_1, D_2)$ est une $D$-décomposition de $2^e$-espèce non triviale, il existe des entiers relatifs non nuls $x$, $y$ et $z$ tels que $x$, $yD_1$ et $zD_2$ soient premiers entre eux deux à deux, que $y$ soit pair et que $x^2 = y^2 D_1 + Z^2 D_2$ (si $D$ est pair, $y$ étant pair, $D_1$ est l'élément pair du couple $(D_1, D_2)$). En choisissant les signes de $x$ et de $y$ tels que

$$x + y \equiv 1 \pmod 4 \text{ si } D \text{ est impair}$$

et

$$x \equiv 1 \pmod 4 \text{ si } D \text{ est pair,}$$

on peut alors montrer la proposition suivante, démontrée par L. Redei dans [4]:

(N.B.: les conditions ci-dessus vérifiées par $x$, $y$ et $z$ seront désignées par la suite par conditions (1)).

*Proposition 2:* Une $D$-décomposition de $2^e$-espèce $(D_1, D_2)$ non triviale est une $D$-décomposition de $3^e$-espèce si et seulement si il existe une $D$-décomposition $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ telle que

si $D \equiv 1 \pmod 4$ ou $D \equiv 8 \pmod{16}$

$$\left(\frac{2x\,\mathcal{E}}{q_2}\right) = +1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{x\,\mathcal{E}}{q_1}\right) = +1$$

si $D \equiv 12 \pmod{16}$

$$\left(\frac{2x\,\mathcal{E}}{q_2}\right) = +1\,, \quad \left(\frac{x\,\mathcal{E}}{q_1}\right) = +1 \qquad \textit{pour} \qquad q_1 \neq 2$$

$$\text{et} \qquad \left(\frac{(x+2y)\,\mathcal{E}}{2}\right) = +1$$

où $q_i$ parcourt les diviseurs premiers de $Di$ $(i=1, 2)$ avec $\left(\frac{a\,\mathcal{E}}{q}\right) = \left(\frac{a\,E_1}{q}\right)$ $\left(\text{resp. } \left(\frac{a\,E_2}{q}\right)\right)$ si $q$ divise $E_2$ (resp. $E_1$).

Une méthode pour évaluer $R_2$ et $R_3$ consiste donc à déterminer l'ensemble des $D$-décompositions, puis parmi celles-ci l'ensemble des $D$-décompositions de $2^e$-espèce et enfin, parmi ces dernières celles qui sont de $3^e$-espèce.

Mais on peut aussi procéder de façon plus « mécanique » — cf. [3] et [4] —:

Soit $t$ le nombre de diviseurs premiers de $D$ que l'on désigne par $P_i$ $(i=1, 2, ..., t)$ avec, si $D$ est pair, $P_t = 2$. On sait que $R_1 = t - 1$. Notons $P_i^* = (-1)^{\frac{P_i - 1}{2}} P_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., t\}$ tel que $P_i \neq 2$.

a. Considérons la matrice $M_k$ suivante

$$M_k = \begin{bmatrix} \left(\frac{D/P_1^*}{P_1}\right) & \left(\frac{P_2^*}{P_1}\right) & \cdots & \left(\frac{P_i^*}{P_2}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_2}\right) \\ \left(\frac{P_1^*}{P_2}\right) & \left(\frac{D/P_2^*}{P_2}\right) & \cdots & \left(\frac{P_i^*}{P_2}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_2}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \left(\frac{P_1^*}{P_i}\right) & \left(\frac{P_2^*}{P_i}\right) & \cdots & \left(\frac{D/P_i^*}{P_i}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_i}\right) \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{P_1^*}{P_t}\right) & \left(\frac{P_2^*}{P_t}\right) & \cdots & \left(\frac{P_i^*}{P_t}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_t}\right) \end{bmatrix}$$

C'est une matrice à $t-1$ colonnes et $t$ lignes dont les éléments sont égaux à $+1$ ou $-1$. On dit que la i-ème colonne ($i=1, \ldots, t-1$) « ap[illegible] tient à $P_i$ », avec $d = P_1^{*\varepsilon 1} P_2^{*\varepsilon 2} \ldots P_{t-1}^{*\varepsilon t-1}$ où les $\varepsilon_i$ ($i=1, \ldots, t-1$) sont [illegible] tous nuls et appartiennent à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on appelle « produit des colonnes appartenant à $d$» la colonne de $t$ lignes dont l'élément de la j-ème ligne ($j=1,2,\ldots,t$) est égal au produit des éléments de la j-ème ligne des colonnes appartenant aux $P_i$ ($i=1, 2, \ldots, t-1$) qui divisent $d$. On appelle aussi « colonne unité », la colonne de $t$ lignes dont tous les éléments sont égaux à $+1$.

On voit alors que la $D$-décomposition non triviale ($D_1$, $D_2$) est une $D$-décomposition de 2e-espèce si et seulement si le produit des colonnes appartenant à $D_1$ (ou à $D_2$ si $P_t$ divise $D_1$) est la colonne unité. En conséquence:

*Proposition 1' : $2^{R2}$ est égal au nombre d'éléments $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1})$ de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{t-1}$ tels que le produit des colonnes appartenant à $d = P_1^{*\varepsilon 1} P_2^{*\varepsilon 2} \ldots P_{t-1}^{*\varepsilon t-1}$ soit égal à la colonne unité,* en associant, par convention, la colonne unité à $d = P_1^{*0} P_2^{*0} \ldots P_{t-1}^{*0}$.

b. Soient ($D_1$, $D_2$) une $D$-décomposition de 2e-espèce non triviale et $x$, $y$ et $z$ des entiers relatifs vérifiant les conditions (1). Considérons la matrice $M_k(x)$ suivante:

$$M_k(x) = \begin{bmatrix} \left(\frac{D/P_1^*}{P_1}\right) & \left(\frac{P_2^*}{P_1}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_1}\right) & \left(\frac{a}{P_1}\right) \\ \left(\frac{P_1^*}{P_2}\right) & \left(\frac{D/P_2^*}{P_2}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_2}\right) & \left(\frac{a}{P_2}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{P_1^*}{P_t}\right) & \left(\frac{P_2^*}{P_t}\right) & \cdots & \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_t}\right) & \left(\frac{a}{P_t}\right) \end{bmatrix}$$

C'est une matrice à $t$ lignes et $t$ colonnes telle que, si $D$ est impair, $P_t$ divise $D_1$ et où

$$\left(\frac{a}{P_i}\right) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{P_i}\right) & \text{si } P_i \text{ divise } D_2 \\ \left(\frac{x}{P_i}\right) & \text{si } P_i \text{ divise } D_1 \text{ et } i \neq t \\ \left(\frac{x+2y}{P_t}\right) & \text{si } D \equiv 12 \pmod{16}, \left(\frac{x}{q_t}\right) \text{ sinon.} \end{cases}$$

En utilisant les mêmes conventions que précédemment et en désignant la dernière colonne de $M_k(x)$ par « la colonne appartenant à $P_t$ », on obtient la proposition suivante:

*Proposition 2' : La D-décomposition de 2e-espèce non triviale* $(D_1, D_2)$ *est une D-décomposition de 3e-espèce si et seulement si il existe* $d = P_1^{*\varepsilon 1} P_2^{*\varepsilon 2} \ldots P_{t-1}^{*\varepsilon t-1}$ *avec* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1})$ *appartenant à* $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{t-1}$ *tel que le produit des colonnes appartenant à* $d.p_t$ *soit la colonne unité.*

Le programme employé pour déterminer $R_2$ et $R_3$ a été établi en utilisant les propositions 1' et 2' et écrit en Algol 60.

L'entier $m > 0$ étant sans facteur carré, on détermine successivement le 4-rang $\tilde{R}_2$ et le 8-rang $\tilde{R}_3$ correspondant à $\tilde{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, puis le 4-rang $R_2$ et le 8-rang $R_3$ correspondant à $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$. Ceci non seulement pour utiliser le fait que les éléments des tableaux $M_{\tilde{k}}$ et $M_k$ sont presque tous identiques mais aussi pour tenir compte de l'inégalité $\tilde{R}_2 \geqslant R_2$ démontrée par P. Domey et J. J. Payan — cf. [2] —, et qui permet de simplifier le programme.

*Schéma du programme :*

1. Introduction de $m > 0$ dans la machine.
2. Test pour savoir si $m$ est sans facteur carré.
3. Détermination des facteurs premiers de $m$.
4. a. Remplissage du tableau $M_{\tilde{k}}$.
   b. Recherche des quantités $D_2$ qui correspondent à des produits de colonnes égaux à la colonne unité et détermination de $\tilde{R}_2$ (si $\tilde{R}_2 = 0$, alors $\tilde{R}_3 = R_2 = R_3 = 0$).
   c. Avec chacune des quantités $D_2$:
      1. Recherche d'une solution $dX^2 = Y^2 D_1 + Z^2 D_2$ vérifiant les conditions (1).
      2. Remplissage de $M_{\tilde{k}}(x)$.
      3. Test pour savoir si $(D_1, D_2)$ est une $D$-décomposition de 3e-espèce et détermination de $\tilde{R}_3$.
5. a. Modification de $M_{\tilde{k}}$ pour obtenir $M_k$.
   b. Cf. 4.b.
   c. Cf. 4.c.

Pour déterminer une solution de l'équation $X^2 = Y^2 D_1 + Z^2 D_2$, on se ramène d'abord à résoudre l'équation équivalente du type $a\alpha^2 = b\beta^2 + c\gamma^2$ où $a$, $b$ et $c$ sont des entiers strictement positifs. On fait ensuite calculer une solution en entiers $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ de l'équation $a\alpha^2 = b\beta^2 + c\gamma^2$ en programmant des essais méthodiques, dans l'ordre croissant, pour l'entier $\alpha$, puis, $\alpha$ étant fixé, pour l'entier $\beta$: on prend pour valeur initiale de $\alpha$ la partie entière de $\dfrac{b+c}{a}$ et, pour une valeur de $\alpha$ fixée, on fait balayer par $\beta$ les valeurs comprises entre 1 et $\sqrt{\dfrac{a\alpha^2 - c}{b}}$; on itère le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne une solution.

Bien que les calculs aient été faits à la machine pour $1 < |m| < 10\,000$, nous ne donnons ici qu'un extrait des tables ainsi obtenues [1]). Cet extrait

[1]) Un exemplaire roneotypé complet de ces tables peut être obtenu à l'Institut de mathématiques pures, Boîte postale 116, 38 — Saint-Martin d'Hères, France.

correspond à $4600 < |m| < 5200$, cette tranche de nombres est telle que l'on trouve la plupart des valeurs obtenues pour $(R_1, R_2, R_3)$ et $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3)$ lorsque $|m|$ varie de 1 à 10 000.

On peut noter cependant que, pour les valeurs de $|m|$ inférieures à 10 000, deux extensions seulement ont un 8-rang du 2-groupe des classes d'idéaux au sens restreint strictement supérieur à 1; il s'agit de $\mathbf{Q}(\sqrt{-6497})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-7966})$, pour lesquelles $\tilde{R}_3$ est égal à 2.

On peut aussi remarquer que, alors que la différence $\tilde{R}_2 - R_2$ est toujours positive ou nulle — cf. [2] —, il n'en est pas de même pour $\tilde{R}_3 - R_3$ par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{-4705})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{4705})$, $\tilde{R}_3 - R_3 = -1$.

TABLEAU I: $R_1$, $R_2$, $R_3$ pour $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$.

| $m$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $m$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $m$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $m$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4607 | 2 | 1 | 1 | 4767 | 3 | 1 | 0 | 4899 | 3 | 1 | 1 | 5066 | 2 | 1 | 0 |
| 4614 | 2 | 1 | 0 | 4777 | 1 | 1 | 0 | 4902 | 3 | 1 | 0 | 5069 | 1 | 1 | 0 |
| 4633 | 1 | 1 | 0 | 4786 | 1 | 1 | 0 | 4930 | 3 | 1 | 0 | 5105 | 1 | 1 | 1 |
| 4645 | 1 | 1 | 0 | 4807 | 3 | 1 | 1 | 4939 | 2 | 1 | 0 | 5109 | 2 | 1 | 0 |
| 4658 | 2 | 2 | 0 | 4810 | 3 | 2 | 0 | 4946 | 1 | 1 | 0 | 5134 | 2 | 1 | 0 |
| 4669 | 2 | 1 | 1 | 4827 | 2 | 1 | 0 | 4953 | 2 | 1 | 0 | 5135 | 3 | 1 | 0 |
| 4674 | 3 | 1 | 0 | 4830 | 4 | 1 | 0 | 4971 | 2 | 1 | 1 | 5138 | 2 | 1 | 0 |
| 4705 | 1 | 1 | 1 | 4834 | 1 | 1 | 0 | 4981 | 1 | 1 | 1 | 5141 | 1 | 1 | 0 |
| 4711 | 2 | 1 | 0 | 4838 | 2 | 1 | 0 | 5002 | 2 | 1 | 1 | 5181 | 2 | 1 | 0 |
| 4715 | 3 | 1 | 0 | 4849 | 1 | 1 | 0 | 5017 | 1 | 1 | 0 | 5183 | 2 | 1 | 1 |
| 4717 | 1 | 1 | 0 | 4882 | 1 | 1 | 0 | 5026 | 2 | 1 | 0 | 5186 | 1 | 1 | 1 |
| 4718 | 2 | 1 | 0 | 4890 | 3 | 1 | 0 | 5037 | 2 | 1 | 0 | 5190 | 3 | 1 | 0 |
| 4738 | 2 | 1 | 1 | 4891 | 2 | 1 | 0 | 5042 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 4754 | 1 | 1 | 0 | 4895 | 3 | 1 | 0 | 5045 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 4763 | 2 | 1 | 0 | 4898 | 2 | 1 | 0 | 5057 | 1 | 1 | 0 | | | | |

TABLEAU II: $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$, $\tilde{R}_3$ pour $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

| $m$ | $\tilde{R}_1$ | $\tilde{R}_2$ | $\tilde{R}_3$ | $m$ | $\tilde{R}_1$ | $\tilde{R}_2$ | $\tilde{R}_3$ | $m$ | $\tilde{R}_1$ | $\tilde{R}_2$ | $\tilde{R}_3$ | $m$ | $\tilde{R}_1$ | $\tilde{R}_2$ | $\tilde{R}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4602 | 3 | 1 | 1 | 4754 | 1 | 1 | 0 | 4899 | 2 | 1 | 1 | 5069 | 2 | 1 | 0 |
| 4605 | 3 | 1 | 1 | 4763 | 1 | 1 | 0 | 4902 | 3 | 1 | 1 | 5073 | 3 | 1 | 0 |
| 4607 | 1 | 1 | 1 | 4766 | 1 | 1 | 1 | 4907 | 1 | 1 | 0 | 5074 | 2 | 1 | 0 |
| 4613 | 2 | 1 | 0 | 4767 | 2 | 1 | 1 | 4917 | 3 | 1 | 0 | 5079 | 1 | 1 | 1 |
| 4614 | 2 | 1 | 0 | 4771 | 1 | 1 | 0 | 4921 | 3 | 1 | 0 | 5081 | 1 | 1 | 0 |
| 4619 | 1 | 1 | 0 | 4777 | 2 | 2 | 1 | 4930 | 3 | 1 | 1 | 5083 | 2 | 1 | 0 |
| 4622 | 1 | 1 | 0 | 4781 | 2 | 1 | 1 | 4935 | 3 | 1 | 0 | 5086 | 1 | 1 | 1 |
| 4631 | 1 | 1 | 0 | 4786 | 1 | 1 | 1 | 4937 | 1 | 1 | 0 | 5089 | 2 | 1 | 1 |
| 4633 | 2 | 2 | 1 | 4790 | 2 | 1 | 1 | 4939 | 1 | 1 | 1 | 5095 | 1 | 1 | 1 |
| 4634 | 2 | 1 | 0 | 4791 | 1 | 1 | 0 | 4942 | 2 | 1 | 0 | 5102 | 1 | 1 | 1 |
| 4641 | 4 | 1 | 1 | 4793 | 1 | 1 | 1 | 4946 | 1 | 1 | 1 | 5105 | 2 | 1 | 0 |
| 4642 | 2 | 1 | 0 | 4794 | 3 | 1 | 1 | 4953 | 3 | 1 | 1 | 5106 | 3 | 1 | 0 |
| 4645 | 2 | 1 | 1 | 4798 | 1 | 1 | 1 | 4955 | 1 | 1 | 0 | 5109 | 3 | 1 | 1 |
| 4646 | 2 | 1 | 0 | 4801 | 1 | 1 | 1 | 4962 | 2 | 1 | 1 | 5113 | 1 | 1 | 0 |
| 4647 | 1 | 1 | 1 | 4807 | 2 | 1 | 0 | 4963 | 1 | 1 | 0 | 5115 | 3 | 1 | 0 |
| 4649 | 1 | 1 | 1 | 4810 | 3 | 2 | 0 | 4965 | 3 | 1 | 0 | 5117 | 3 | 1 | 1 |
| 4657 | 1 | 1 | 1 | 4817 | 1 | 1 | 1 | 4966 | 2 | 1 | 0 | 5129 | 2 | 1 | 0 |
| 4658 | 2 | 2 | 1 | 4818 | 3 | 1 | 1 | 4969 | 1 | 1 | 1 | 5134 | 2 | 2 | 1 |
| 4665 | 3 | 1 | 0 | 4821 | 2 | 1 | 0 | 4971 | 1 | 1 | 1 | 5135 | 2 | 1 | 0 |
| 4669 | 3 | 1 | 1 | 4823 | 2 | 1 | 1 | 4978 | 2 | 1 | 0 | 5138 | 2 | 1 | 1 |
| 4673 | 1 | 1 | 0 | 4826 | 2 | 1 | 0 | 4981 | 2 | 1 | 1 | 5141 | 2 | 1 | 0 |
| 4674 | 3 | 1 | 0 | 4827 | 1 | 1 | 0 | 4982 | 2 | 1 | 0 | 5143 | 1 | 1 | 1 |
| 4677 | 2 | 1 | 0 | 4829 | 2 | 1 | 0 | 4985 | 2 | 1 | 0 | 5153 | 1 | 1 | 0 |
| 4681 | 2 | 1 | 1 | 4830 | 4 | 1 | 0 | 4993 | 1 | 1 | 1 | 5154 | 2 | 1 | 0 |
| 4683 | 2 | 1 | 1 | 4834 | 1 | 1 | 0 | 4994 | 2 | 1 | 1 | 5155 | 1 | 1 | 0 |
| 4687 | 1 | 1 | 1 | 4838 | 2 | 1 | 0 | 5002 | 2 | 1 | 1 | 5159 | 2 | 1 | 0 |
| 4690 | 3 | 1 | 1 | 4841 | 2 | 1 | 1 | 5005 | 4 | 1 | 0 | 5161 | 2 | 1 | 0 |
| 4699 | 1 | 1 | 0 | 4843 | 1 | 1 | 1 | 5006 | 1 | 1 | 0 | 5173 | 2 | 1 | 0 |
| 4702 | 1 | 1 | 1 | 4845 | 4 | 1 | 0 | 5007 | 1 | 1 | 0 | 5174 | 2 | 1 | 0 |
| 4705 | 2 | 1 | 0 | 4846 | 1 | 1 | 0 | 5009 | 1 | 1 | 0 | 5177 | 2 | 1 | 0 |
| 4710 | 3 | 1 | 1 | 4849 | 2 | 1 | 1 | 5010 | 3 | 1 | 0 | 5178 | 2 | 1 | 1 |
| 4711 | 1 | 1 | 0 | 4853 | 2 | 1 | 1 | 5015 | 2 | 1 | 0 | 5181 | 3 | 1 | 0 |
| 4715 | 2 | 1 | 0 | 4855 | 1 | 1 | 0 | 5017 | 2 | 1 | 1 | 5182 | 1 | 1 | 1 |
| 4717 | 2 | 1 | 0 | 4858 | 2 | 1 | 0 | 5026 | 2 | 1 | 0 | 5183 | 1 | 1 | 1 |
| 4718 | 2 | 2 | 1 | 4863 | 1 | 1 | 0 | 5033 | 2 | 1 | 0 | 5185 | 3 | 1 | 1 |
| 4721 | 1 | 1 | 1 | 4866 | 2 | 1 | 0 | 5034 | 2 | 1 | 0 | 5186 | 1 | 1 | 1 |
| 4722 | 2 | 1 | 0 | 4867 | 1 | 1 | 1 | 5037 | 3 | 2 | 0 | 5187 | 3 | 1 | 0 |
| 4729 | 1 | 1 | 1 | 4882 | 1 | 1 | 1 | 5042 | 1 | 1 | 0 | 5190 | 3 | 2 | 1 |
| 4730 | 3 | 1 | 0 | 4889 | 1 | 1 | 1 | 5045 | 2 | 1 | 0 | 5191 | 1 | 1 | 1 |
| 4738 | 2 | 1 | 1 | 4890 | 3 | 1 | 1 | 5053 | 2 | 1 | 0 | 5195 | 1 | 1 | 1 |
| 4741 | 2 | 1 | 0 | 4891 | 1 | 1 | 0 | 5057 | 2 | 1 | 1 | 5198 | 2 | 1 | 0 |
| 4745 | 3 | 1 | 0 | 4894 | 1 | 1 | 1 | 5063 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 4747 | 1 | 1 | 1 | 4895 | 2 | 2 | 1 | 5065 | 2 | 1 | 0 | | | | |
| 4749 | 2 | 1 | 1 | 4898 | 2 | 1 | 0 | 5066 | 2 | 1 | 0 | | | | |

N.B.: Dans le tableau I ne sont pas mentionnées les valeurs de $m$ telles que, pour $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $R_2 = 0$. De même, les valeurs de $m$ telles que, pour $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $\tilde{R}_2 = 0$ ne sont pas mentionnées dans le tableau II.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Bourbaki, N. *Algèbre*, chap. VII, §4, exercice.

[2] Damey, P. et J. J. Payan. Existence et construction des extensions galoisiennes et non-abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2. *J. reine angew. Math. 244* (1970), 37-54.

[3] Redei, L. Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzhal der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. *J. reine angew. Math. 171* (1934), 55-64.

[4] —— Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. *J. reine angew. Math. 171* (1934), 131-148.

[5] —— und H. Reichardt. Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers. *J. reine angew. Math. 170* (1933), 69-74.

[6] Reichardt, H. Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper. *J. reine angew. Math. 170* (1933), 75-82.


*(Reçu le 26 octobre 1971)*

Lyliane Bouvier
Institut de mathématiques pures
Boîte postale 116
F-38 — Saint-Martin d'Hères

vide-leer-empty