Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION DE CERTAINS TYPES D'ANNEAUX EUCLIDIENS

Autor: Picavet, Gabriel

Kapitel: I. Caractérisation des Anneaux Euclidiens POUR LESQUELS IL Y A UNICITÉ DE LA DIVISION

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45375

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On obtient alors $r' = r - \frac{r}{|r|} b$. Réciproquement si $a = bq + r$ avec les mêmes conditions que ci-dessus pour a, b, q, r, on peut écrire

$$a = b\left(q + \frac{r}{|r|}\right) + r - \frac{r}{|r|} b \text{ et } \left| r - \frac{r}{|r|} b \right| < b.$$

Ceci montre que dans le cas d'une division avec un reste r non nul, il existe une autre division et une seule avec un reste r' différent de r.

D'autre part si l'on considère un anneau de polynomes $K[X]$ à une indéterminée sur un corps commutatif K, l'application d qui à tout polynome non nul associe son degré est un stathme qui fait de $K[X]$ un anneau Euclidien.

Il est connu que dans ce type d'anneaux le quotient et le reste d'une division sont uniques.

On peut donc se poser le problème de la caractérisation des couples (A, φ) formés d'un anneau Euclidien et de son stathme, pour lesquels il y a unicité du quotient et du reste dans toute division. Ce problème est résolu dans la partie I.

Dans la partie II, on caractérise les couples (A, φ) Euclidiens tels que φ possède les propriétés formelles de la valeur absolue sur $\mathbf{Z}$.

I. Caractérisation des Anneaux Euclidiens pour lesquels il y a unicité de la division

Il convient de noter un anneau Euclidien par un couple (A, φ), car un anneau peut être Euclidien pour des stathmes différents. On sait, voir par exemple [4] Ch. I, Par. 15, que dans un anneau Euclidien (A, φ) deux éléments a et b de A sont associés si et seulement si $\varphi(a) = \varphi(b)$ et $a \mid b$. Il en résulte que u est un élément inversible de A (ou unité) si et seulement si $\varphi(u) = \varphi(1)$. L'ensemble des unités de A sera noté par $U(A)$.

Définition 1: On dira que pour un anneau Euclidien il y a unicité de la division si le couple (q, r) dont la définition de l'introduction assure l'existence est unique.

Proposition 1: Il y a unicité de la division pour (A, φ) si et seulement si: pour tout couple (a, b) d'éléments de A^* tels que $a \neq b$ on a $\varphi(a - b) \leqslant \operatorname{Sup}(\varphi(a), \varphi(b))$.

Supposons qu'il y ait unicité, et soient a et b des éléments distincts de A^*. Si $a - b = -a$ alors $\varphi(a-b) = \varphi(a)$ et dans ce cas $\varphi(a-b) \leqslant \operatorname{Sup}(\varphi(a), \varphi(b))$. Si $2a - b$ est différent de 0, on peut écrire:

$$2a - b = (a-b) \cdot 1 + a$$
$$2a - b = (a-b) \cdot 2 + b$$

L'hypothèse $\varphi(a) < \varphi(a-b)$ et $\varphi(b) < \varphi(a-b)$ entraîne alors $a = b$, par unicité de la division, ce qui est absurde. D'où: $\varphi(a-b) \leqslant \operatorname{Sup}(\varphi(a), \varphi(b))$.

La réciproque est bien connue, sa démonstration pouvant se calquer sur celle qui prouve l'unicité de la division dans un anneau de polynomes.

PROPOSITION 2: Soit (A, φ) un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division. Alors A contient un sous corps K constitué par les unités de A et 0.

Il suffit de prouver que K est un sous groupe additif de A. Soient ε et ε' des éléments de K distincts et non nuls. La suite d'inégalités: $\varphi(1) \leqslant \varphi(\varepsilon - \varepsilon') \leqslant \operatorname{Sup}(\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon')) = \varphi(1)$ entraîne $\varepsilon - \varepsilon'$ est une unité.

PROPOSITION 3: Soit (A, φ) un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division. Si x et y éléments distincts de A^* sont tels que $\varphi(y) < \varphi(x)$, alors $\varphi(x-y) = \varphi(x)$.

La proposition 1 montre déjà que $\varphi(x-y) \leqslant \varphi(x)$. Supposons que $\varphi(x-y) < \varphi(x)$, alors $2x - y$ est différent de 0, car dans le cas contraire on aurait $\varphi(x-y)$ égal à $\varphi(x)$. Les relations:

$$2x - y = x \cdot 1 + (x-y) \quad \text{avec} \quad \varphi(x-y) < \varphi(x)$$
$$2x - y = x \cdot 2 + (-y) \quad \text{avec} \quad \varphi(-y) < \varphi(x)$$

entraînent, par unicité de la divison: $1 = 2$. On aurait alors A réduit à 0, ce qui est impossible. Par suite $\varphi(x-y) = \varphi(x)$.

PROPOSITION 4: Soit (A, φ) un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division. Si A n'est pas un corps, il existe un élément x de A^* tel que:

1) Pour tout élément a de A^*, il existe un nombre fini d'éléments $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ de K, déterminés de façon unique et tels que a $= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i x^i$.

2) Si dans l'écriture de a ci-dessus $\varepsilon_n \neq 0$, alors $\varphi(a) = \varphi(x^n)$.

L'ensemble B des éléments a de A^* tels que $\varphi(a) > \varphi(1)$ n'est pas vide. En effet, dans le cas contraire on aurait pour tout élément x de A^* $\varphi(x) = \varphi(1)$ et A serait un corps. Or $\varphi(B)$ est inclus dans $\mathbf{N}$ et par conséquent il possède un plus petit élément $\varphi(x)$.

Soit alors un élément a de A^*. Dans le cas où a appartient à K, l'assertion 1) est démontrée. Si a n'est pas une unité, on peut écrire $a = x q_0 + r_0$ avec $r_0 = 0$ ou $\varphi(r_0) < \varphi(x)$. Dans les deux cas r_0 appartient à K, et par suite $a - r_0$ est différent de 0. De plus $\varphi(a - r_0) = \varphi(a)$. C'est clair si $r_0 = 0$.

Sinon on remarque que $\varphi(r_0) = 1 < \varphi(a)$ et alors $\varphi(a - r_0) = \varphi(a)$, d'après le résultat de la proposition 3). On en déduit que $\varphi(q_0 x) = \varphi(a)$ et par suite $\varphi(q_0) \leqslant \varphi(a)$. Si on avait $\varphi(q_0) = \varphi(a)$, on aurait alors x appartient à $U(A)$ puisque $\varphi(q_0) = \varphi(q_0 x)$ dans ce cas. Par conséquent on a $\varphi(q_0) < \varphi(a)$.

En conclusion on peut écrire $a = x q_0 + \varepsilon_0$ avec ε_0 élément de K et $\varphi(q_0) < \varphi(a)$.

Dans ces conditions, si q_0 appartient à K, l'assertion 1) est démontrée. Si q_0 n'appartient pas à K, on est ramené à la situation précédente avec: $q_0 = x q_1 + \varepsilon_1$ où ε_1 est élément de K. On démontre de même que précédemment que $\varphi(q_1) < \varphi(q_0)$. On construit ainsi, par récurrence, une suite $q_0, \ldots, q_n$ d'éléments de A^* tels que $\varphi(q_n) < \varphi(q_{n-1}) < \ldots < \varphi(q_0) < \varphi(a)$ et définis par des relations $q_i = x q_{i+1} + \varepsilon_{i+1}$ où ε_{i+1} est un élément de K. La suite d'entiers $\varphi(q_i)$ étant strictement décroissante, il existe un entier n tel que: $\varphi(q_n) < \varphi(x)$ donc tel que q_n soit élément de K. Il suffit alors d'éliminer les éléments q_i des relations les définissant pour prouver l'assertion 1). Montrons que la décomposition de a suivant les puissances de x se fait de façon unique. Pour cela, on peut remarquer qu'il suffit de prouver l'indépendance linéaire des puissances de x sur K. Soit donc une relation $\varepsilon_0 + \varepsilon_i x + \ldots + \varepsilon_n x^n = 0$ où les ε_i sont des éléments de K. Si ε_0 est différent de 0, la relation ci-dessus entraîne que x est une unité, ce qui est impossible. Par suite ε_0 est égal à 0; simplifiant alors la relation par x (A est intègre), on est ramené à une relation $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n x^{n-1} = 0$. On démontre de même que tous les ε_i sont nuls.

Démontrons maintenant l'assertion 2). Pour tout entier n, x^{n-1} divise x^n et ces deux éléments ne sont pas associés, il en résulte que $\varphi(x^{n-1}) < \varphi(x^n)$ pour tout entier n. Soit $a = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \ldots + \varepsilon_n x^n$ ou $\varepsilon_n \neq 0$.

Posant $q = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n x^{n-1}$, on obtient $a = \varepsilon_0 + xq$. Or xq est différent de 0 puisque $\varepsilon_n \neq 0$, il résulte alors de la proposition 3) que

$\varphi(a) = \varphi(xq)$ dans le cas où ε_0 n'est pas nul. Cette égalité est encore vraie lorsque $\varepsilon_0 = 0$.

Mais, de façon analogue, on peut écrire: $xq = \varepsilon_1 x + x^2 q'$ et comme ci-dessus on en déduit que $\varphi(xq) = \varphi(x^2 q')$. On démontre, ainsi, par récurrence, que $\varphi(a) = \varphi(\varepsilon_n x^n) = \varphi(x^n)$.

PROPOSITION 5: Soit (A, φ) un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division et tel que A ne soit pas un corps. Alors A s'identifie à un anneau de polynomes $K[X]$ sur un corps et son stathme φ à une fonction de $K[X]^*$ dans $\mathbf{N}$ du type $\omega \circ d$, où ω est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et d la fonction degré sur $K[X]$. Réciproquement $(K[X], \omega \circ d)$, où ω et d sont définis comme ci-dessus, est un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division.

La partie directe est une interprétation de la proposition 4). La réciproque est évidente.

II. CARACTÉRISATION DES ANNEAUX EUCLIDIENS DONT LE STATHME POSSÈDE LES PROPRIÉTÉS DE LA VALEUR ABSOLUE SUR $\mathbf{Z}$

DÉFINITION 1: On dira que l'anneau Euclidien (A, φ) vérifie la propriété (H) si A n'est pas un corps et si le stathme φ vérifie:

1) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$.

2) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* l'égalité $\varphi(x) = \varphi(y)$ équivaut à x et y sont des éléments associés.

3) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* tels que $x + y \neq 0$ $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.

On se propose de prouver que si (A, φ) vérifie (H), il est alors isomorphe à $(\mathbf{Z}, |\ |)$ en un sens qui sera précisé plus loin.

REMARQUE 1: Un anneau Euclidien dont le stathme est constant est un corps. Cette remarque jointe au fait que $\varphi(1)^2 = \varphi(1)$ lorsque (A, φ) vérifie (H), montre que dans ce cas $\varphi(1) = 1$. On peut alors prolonger φ à A en posant $\varphi(0) = 0$. On pourra donc considérer φ comme une « norme » sur A.

PROPOSITION 1: Soit (A, φ) un anneau Euclidien vérifiant (H). L'application canonique de $\mathbf{Z}$ dans A est une injection.