Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES EN DIMENSION 6

Autor: Capdevielle, Bernadette

Kapitel: II. Etude de $\sum_{n,5}^3 \quad (k = R ou C)$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45374

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\Lambda^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \ \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$

$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\Lambda^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\Lambda^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega-\omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.

2. Remarques

2.1. — L'expression (1) est pour ω, à la fois une expression minimale et une B-expression minimale: $l(\omega) = L(\omega) = 2$.

2.2. — Soit ω un élément quelconque de $\Sigma^3_{n,5}$, et Δ la droite unique, telle que ω est élément de $I(\Delta)$, alors quel que soit le sous-espace E_1, avec $S\omega = \Delta \oplus E_1$, on a $\omega \in \Delta \otimes \Lambda^2 E_1$.

2.3. — Si E est hermitien (ou euclidien), compte tenu des propriétés des bivecteurs, la base, dans laquelle ω s'écrit sous forme canonique, peut-être choisie orthonormée.

III. Etude de $\Sigma^3_{6,6}$

A. — Cas complexe

Nous envisageons d'abord le cas où E est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps des complexes.

1. Recherche de modèles

1.1. — Proposition 1. — *Tout élément de $\Sigma^3_{6,6}$ peut s'écrire sous l'une des deux formes*

(1) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

(2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ étant une base de E. Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

1.2. — Lemme 1. — Soient γ_1 et γ_2 deux élément de $\Lambda^2 E$, de rang 4, de même support $F \subset E$. Alors, il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ soit décomposable. En effet, $\Lambda^4 F$ est une droite domplexe contenant $\gamma_i \wedge \gamma_j$ $i . j = 1,2$: $\gamma_1 \wedge \gamma_1$ est non nul; posons $\gamma_2 \wedge \gamma_2 = a\gamma_1 \wedge \gamma_1$, $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = b\gamma_1 \wedge \gamma_1 \qquad b \in \mathbf{C} \text{ (b pouvant être nul)}$$

pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = \gamma_1 \wedge \gamma_1 (a - 2\mu b + \mu^2)$ donc il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = 0$ ce qui signifie que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ est décomposable.