I. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

I. Définitions et rappels

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel, de dimension finie, sur le corps $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Rappels

1.1. — [4] (page 101)

On note $\wedge^p E$ la puissance extérieure p-ième de l'espace vectoriel E. Si $h : F \to E$ est une application linéaire, on note

$$h^p : \wedge^p F \to \wedge^p E \text{ la puissance extérieure } p\text{-ième de } h.$$

Si h est injective, h^p est aussi injective et on identifiera dans la suite $\wedge^p F$ et son image par h^p.

Si h est un automorphisme de E, h^p est un automorphisme de $\wedge^p E$ et l'opération de $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$ est définie par:

$$Gl(E) \times \wedge^p E \to \wedge^p E$$
$$(h, \omega) \to h^p(\omega)$$

Dans le cas où E est de dimension finie n, soit $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ une base de E; alors

pour $p \leqq n$ les p-vecteurs décomposables

$\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1}$ avec $1 \leqq i_1 < ... < i_p \leqq n$ forment une base de $\wedge^p E$

pour $p > n$ $\wedge^p E$ se réduit à 0.

1.2. — [2] (page 120)

Si $E = E_1 \oplus E_2$, on a un isomorphisme canonique,

$$\wedge^p E \simeq \oplus (\wedge^q E_1 \underset{0 \leqq q \leqq p}{\otimes} \wedge^{p-q} E_2).$$

En particulier, si E_1 est un sous-espace de E de dimension 1, E_2 un supplémentaire quelconque de E_1, donc de dimension $n - 1$, on a

$$\wedge^p E \approx (E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2) \oplus \wedge^p E_2$$

Cela signifie que tout élément $\omega \in \wedge^p E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \alpha \wedge \theta + \omega_2$$

où $\alpha \in E_1 \subset E$; $\theta \in \Lambda^{p-1} E_2 \subset \Lambda^{p-1} E$; $\omega_2 \in \Lambda^p E_2 \subset \Lambda^p E$.

REMARQUE. — Donc $\alpha \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \alpha \wedge \theta$.

1.3. — Si K est un corps, H un sous-corps de K, E un espace vectoriel sur le corps H, E_K l'espace vectoriel obtenu à partir de E par extension du corps des scalaires de H à K, alors;

a) l'application η de E dans E_K définie par $\eta(x) = 1 \otimes x$ est H-linéaire injective (ce qui permettra d'identifier E à un sous-ensemble de E_K) et l'ensemble des éléments de la forme $1 \otimes x$ engendre E_K.

b) si h est un homomorphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E' (espace vectoriel sur le corps H), il lui correspond un homomorphisme unique h_K de E_K dans E'_K tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta"'] & E' \arrow[d, "\eta'"] \\ E_K \arrow[r, "h_k"] & E'_K \end{tikzcd}$$

Le noyau de h_K, K-er h_K, est engendré par η (K-er h).
L'image de h_K, $Im . h_K$, est engendrée par η' ($Im\ h$).

c) il y un isomorphisme canonique de $\Lambda^p E_K$ sur $(\Lambda^p E)_K$.
Nous utiliserons ces remarques dans le cas où $H = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$.

REMARQUE. — En particulier $(E_{\mathbf{C}})^*$ et $(E^*)_{\mathbf{C}}$ sont canoniquement isomorphes, dès que E est un espace vectoriel réel de dimension finie. Nous les identifierons dans la suite et écrirons simplement $E^*_{\mathbf{C}}$.

2. LE RANG

2.1. — [4] (chapitre I)

DÉFINITION. — Soient E un espace vectoriel, $\omega \in \Lambda^p E$ un p-vecteur de E; le *support* de ω est le plus petit sous-espace vectoriel $S_\omega \subset E$, tel que $\omega \in \Lambda^p S_\omega$; sa dimension est le *rang* de ω; le *corang* de ω est la codimention de S_ω dans E.

Pour déterminer le rang d'un p-vecteur, nous utiliserons, principalement, les deux remarques suivantes, vraies si E est de dimension finie.

a) soient ω et ω' deux p-vecteurs, avec $p \geqq 2$; si $\dim(S_\omega \cap S_{\omega'}) \leqq p-2$, alors $S_{\omega+\omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$. En particulier, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$ alors, $\operatorname{rang}(\omega+\omega') = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

b) soient ω un p-vecteur et ω' un q-vecteur, non nuls, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$, alors $S_{\omega\wedge\omega'} = S_\omega \oplus S_{\omega'}$ et $\operatorname{rang}\omega \wedge \omega' = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

2.2 — Si n est la dimension de E, supposé de dimension finie, on désigne par $\Sigma^p_{n,r}$ l'ensemble des p-vecteurs de rang r. On sait [2] (page 104) que

a) pour $3 \leqq p \leqq n-3$ cet ensemble est non vide si et seulement si $r = 0, p, p+2, p+3, \ldots, n$

b) pour les valeurs de r précédentes $\Sigma^p_{n,r}$ est une sous-variété régulière de $\wedge^p E$, de dimension $C^p_r + r(n-r)$.

2.3. — *Le rang est invariant dans l'action canonique du groupe $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.*

2.4. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie; désignons par E_{C} son complexifié. $\wedge^p E$ peut être considéré comme un sous-espace réel de $\wedge^p E_{\mathrm{C}}$. Soit ω un élément de $\wedge^p E$, désignons par ω_{C} le même élément envisagé comme élément de $\wedge^p E_{\mathrm{C}}$.

Proposition. — $S_{\omega_{\mathrm{C}}} = (S_\omega)_{\mathrm{C}}$ et, ω et ω_{C} ont même rang.

3. Longueur. B — Longueur

Dans la suite on désigne par n la dimension de E.

3.1. — *Longueur — expression minimale* [4] (page 112)

Soit ω un p-vecteur non nul; ω peut s'écrire comme somme d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ (d'une manière qui n'est pas unique).

Considérons l'ensemble F, des systèmes libres $s = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$$

Le nombre $l(\omega) = \inf_{s \in F} k$ s'appelle *la longueur de ω.*

Soit alors $\{\omega_1, ..., \omega_k\}$ un élément de F tel que $k = l(\omega)$

$$\sum_{i=1}^{l(\omega)} \omega_i \text{ s'appelle } \textit{une expression minimale de } \omega.$$

REMARQUES. — 1) Il est clair que la longueur d'un p-vecteur ω est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

2) Nous verrons (chapitre III, B. 2) que par passage au complexifié, la longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$, E espace vectoriel réel, n'est pas conservée. En désignant par ω_{C} l'image de ω par l'injection canonique de $\wedge^p E$ dans $\wedge^p E_{\mathrm{C}}$, on a

$$l(\omega_{\mathrm{C}}) \leqq l(\omega).$$

3.2. — *B-Longueur B-expression minimale.*

Soit B l'ensemble des bases b de E et soit ω un élément non nul de $\wedge^p E$.

A chaque $b = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in B$ on peut associer un système libre unique s_b, $(\omega_1, ..., \omega_k)$, d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega_i = \lambda_i \alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1} \qquad 1 \leqq i_1 < ... < i_p \leqq n$$

$\forall i, 1 ... k$ et $\sum_{i-1}^{k} \omega_i = \omega$. Une telle expression s'appelle *B-expression de* ω.

Soit $F = \{s_b \mid b \in B\}$. Le nombre $L(\omega) = \inf_{s_b \in F} k$ s'appelle la *B-longueur de* ω.

Soit $(\omega_1, ..., \omega_k)$ un élément de F tel que $k = L(\omega)$, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i$ s'appelle une *B-expression minimale de* ω.

REMARQUES. — 1) La B-longueur d'un p-vecteur non nul est toujours supérieure ou égale à sa longueur

$$l \leqq L$$

2) La B-longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$ est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

3) La B-longueur n'est pas invariante par passage au complexifié (chapitre III, B. 2). Une base de E, espace vectoriel réel, étant aussi une base de E_{C}, nous aurons avec des notations évidentes $L(\omega_{\mathrm{C}}) \leqq L(\omega)$ pour tout $\omega \in \wedge^p E$.

4. Remarque générale

Les classifications ultérieures seront faites en envisageant les rangs successifs croissants.

Désignons par k le corps de base (**R** ou **C**). Nous savons que l'ensemble, $\Sigma^p_{n,r}$, des p-vecteurs de rang r de $\wedge^p k^n$, est une réunion de trajectoires de $Gl(n)$.

La classification des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$ se réduit à celle des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$; en effet soient ω_1 et ω_2 deux éléments de rang r de $\wedge^p k^n$; alors, modulo une transformation linéaire convenable, on peut supposer leurs supports confondus en un même sous-espace S de dimension r; si une transformation linéaire, $h \in Gl(k, n)$, échange ω_1 et ω_2, elle laisse invariant S et sa restriction à S échange ω_1 et ω_2, envisagés en tant qu'éléments de $\wedge^p S$; la réciproque est évidente.

Il est clair qu'à chaque orbite de $Gl(k, r)$ dans $\Sigma^p_{r,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$) correspond biunivoquement une orbite de $Gl(k, n)$ dans $\Sigma^p_{n,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$), de *même codimension.*

La classification des p-vecteurs de rang r sera donc faite dans un espace de dimension r.

5. Remarques

Dans la suite, $I(D)$ désigne l'idéal de $\wedge E$, engendré par D, droite de l'espace vectoriel E de dimension finie et $\tilde{\omega}_D$ l'image du trivecteur ω par l'application canonique: $\wedge^3 E \to \wedge^3 E/D$.

5.1. — $\omega_D = 0 \Leftrightarrow \omega \in I(D)$.

5.2. — Si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes, et $\omega \in I(D_1) \cap I(D_2)$ alors ω est décomposable.

5.3. — Si $\tilde{\omega}_D$ est décomposable, alors l'image réciproque du support de $\tilde{\omega}$ par la projection canonique de E sur E/D est un 4-plan, $H(D, \omega)$, contenant D, que nous désignerons simplement par H_D pour ω fixé. D'autre part, à tout 3-plan P de H_D, ne contenant pas D, est attaché un élément ω_1, de $\wedge^3 P$ tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D)$.

5.4. — Si D et Δ sont deux droites telles que: $\omega \in I(\Delta)$, $\omega \notin I(D)$ et $\tilde{\omega}_D$ décomposable, alors Δ est contenue dans H_D.

En effet, si on désigne par $\tilde{\Delta}$ la projection de Δ sur E/D, il est clair que $\tilde{\omega}_D$ est un élément de l'idéal de $\wedge E/D$ engendré par $\tilde{\Delta}$.

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\wedge^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \ \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$
$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\wedge^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\wedge^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega - \omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.