Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES EN DIMENSION 6

Autor: Capdevielle, Bernadette

Kapitel: I. DÉFINITIONS ET RAPPELS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45374

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I. Définitions et rappels

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel, de dimension finie, sur le corps $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Rappels

1.1. — [4] (page 101)

On note $\wedge^p E$ la puissance extérieure p-ième de l'espace vectoriel E. Si $h : F \to E$ est une application linéaire, on note

$$h^p : \wedge^p F \to \wedge^p E \text{ la puissance extérieure } p\text{-ième de } h.$$

Si h est injective, h^p est aussi injective et on identifiera dans la suite $\wedge^p F$ et son image par h^p.

Si h est un automorphisme de E, h^p est un automorphisme de $\wedge^p E$ et l'opération de $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$ est définie par:

$$Gl(E) \times \wedge^p E \to \wedge^p E$$
$$(h, \omega) \to h^p(\omega)$$

Dans le cas où E est de dimension finie n, soit $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ une base de E; alors

pour $p \leq n$ les p-vecteurs décomposables

$\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1}$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$ forment une base de $\wedge^p E$

pour $p > n$ $\wedge^p E$ se réduit à 0.

1.2. — [2] (page 120)

Si $E = E_1 \oplus E_2$, on a un isomorphisme canonique,

$$\wedge^p E \simeq \bigoplus_{0 \leq q \leq p} (\wedge^q E_1 \otimes \wedge^{p-q} E_2).$$

En particulier, si E_1 est un sous-espace de E de dimension 1, E_2 un supplémentaire quelconque de E_1, donc de dimension $n - 1$, on a

$$\wedge^p E \approx (E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2) \oplus \wedge^p E_2$$

Cela signifie que tout élément $\omega \in \wedge^p E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \alpha \wedge \theta + \omega_2$$

où $\alpha \in E_1 \subset E$; $\theta \in \wedge^{p-1}E_2 \subset \wedge^{p-1}E$; $\omega_2 \in \wedge^p E_2 \subset \wedge^p E$.

REMARQUE. — Donc $\alpha \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \alpha \wedge \theta$.

1.3. — Si K est un corps, H un sous-corps de K, E un espace vectoriel sur le corps H, E_K l'espace vectoriel obtenu à partir de E par extension du corps des scalaires de H à K, alors;

a) l'application η de E dans E_K définie par $\eta(x) = 1 \otimes x$ est H-linéaire injective (ce qui permettra d'identifier E à un sous-ensemble de E_K) et l'ensemble des éléments de la forme $1 \otimes x$ engendre E_K.

b) si h est un homomorphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E' (espace vectoriel sur le corps H), il lui correspond un homomorphisme unique h_K de E_K dans E'_K tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta' \\ E_K & \xrightarrow{h_k} & E'_K \end{array}$$

Le noyau de h_K, K-er h_K, est engendré par η (K-er h).
L'image de h_K, $Im\,.\,h_K$, est engendrée par η' ($Im\ h$).

c) il y un isomorphisme canonique de $\wedge^p E_K$ sur $(\wedge^p E)_K$.
Nous utiliserons ces remarques dans le cas où $H = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$.

REMARQUE. — En particulier $(E_{\mathbf{C}})^*$ et $(E^*)_{\mathbf{C}}$ sont canoniquement isomorphes, dès que E est un espace vectoriel réel de dimension finie. Nous les identifierons dans la suite et écrirons simplement $E^*_{\mathbf{C}}$.

2. LE RANG

2.1. — [4] (chapitre I)

DÉFINITION. — Soient E un espace vectoriel, $\omega \in \wedge^p E$ un p-vecteur de E; le *support* de ω est le plus petit sous-espace vectoriel $S_\omega \subset E$, tel que $\omega \in \wedge^p S_\omega$; sa dimension est le *rang* de ω; le *corang* de ω est la codimention de S_ω dans E.

Pour déterminer le rang d'un p-vecteur, nous utiliserons, principalement, les deux remarques suivantes, vraies si E est de dimension finie.

a) soient ω et ω' deux p-vecteurs, avec $p \geqq 2$; si $\dim (S_\omega \cap S_{\omega'}) \leqq p-2$, alors $S_{\omega+\omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$. En particulier, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$ alors, $\operatorname{rang}(\omega+\omega') = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

b) soient ω un p-vecteur et ω' un q-vecteur, non nuls, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$, alors $S_{\omega\wedge\omega'} = S_\omega \oplus S_{\omega'}$ et $\operatorname{rang}\omega \wedge \omega' = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

2.2 — Si n est la dimension de E, supposé de dimension finie, on désigne par $\Sigma^p_{n,r}$ l'ensemble des p-vecteurs de rang r. On sait [2] (page 104) que

a) pour $3 \leqq p \leqq n-3$ cet ensemble est non vide si et seulement si $r = 0, p, p+2, p+3, \ldots, n$

b) pour les valeurs de r précédentes $\Sigma^p_{n,r}$ est une sous-variété régulière de $\wedge^p E$, de dimension $C^p_r + r(n-r)$.

2.3. — *Le rang est invariant dans l'action canonique du groupe $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.*

2.4. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie; désignons par E_C son complexifié. $\wedge^p E$ peut être considéré comme un sous-espace réel de $\wedge^p E_C$. Soit ω un élément de $\wedge^p E$, désignons par ω_C le même élément envisagé comme élément de $\wedge^p E_C$.

PROPOSITION. — $S_{\omega_C} = (S_\omega)_C$ et, ω et ω_C ont même rang.

3. LONGUEUR. B — LONGUEUR

Dans la suite on désigne par n la dimension de E.

3.1. — *Longueur — expression minimale* [4] (page 112)

Soit ω un p-vecteur non nul; ω peut s'écrire comme somme d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ (d'une manière qui n'est pas unique).

Considérons l'ensemble F, des systèmes libres $s = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$$

Le nombre $l(\omega) = \inf_{s \in F} k$ s'appelle *la longueur de* ω.

Soit alors $\{\omega_1, ..., \omega_k\}$ un élément de F tel que $k = l(\omega)$

$\sum_{i=1}^{l(\omega)} \omega_i$ s'appelle *une expression minimale de* ω.

REMARQUES. — 1) Il est clair que la longueur d'un p-vecteur ω est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

2) Nous verrons (chapitre III, B. 2) que par passage au complexifié, la longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$, E espace vectoriel réel, n'est pas conservée. En désignant par ω_C l'image de ω par l'injection canonique de $\wedge^p E$ dans $\wedge^p E_C$, on a

$$l(\omega_C) \leq l(\omega).$$

3.2. — *B-Longueur B-expression minimale.*

Soit B l'ensemble des bases b de E et soit ω un élément non nul de $\wedge^p E$.

A chaque $b = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in B$ on peut associer un système libre unique s_b, $(\omega_1, ..., \omega_k)$, d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega_i = \lambda_i \alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1} \qquad 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$$

$\forall i, 1 ... k$ et $\sum_{i-1}^{k} \omega_i = \omega$. Une telle expression s'appelle *B-expression de* ω.

Soit $F = \{s_b \mid b \in B\}$. Le nombre $L(\omega) = \inf_{s_b \in F} k$ s'appelle la *B-longueur de* ω.

Soit $(\omega_1, ..., \omega_k)$ un élément de F tel que $k = L(\omega)$, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i$ s'appelle une *B-expression minimale de* ω.

REMARQUES. — 1) La B-longueur d'un p-vecteur non nul est toujours supérieure ou égale à sa longueur

$$l \leq L$$

2) La B-longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$ est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

3) La B-longueur n'est pas invariante par passage au complexifié (chapitre III, B. 2). Une base de E, espace vectoriel réel, étant aussi une base de E_C, nous aurons avec des notations évidentes $L(\omega_C) \leq L(\omega)$ pour tout $\omega \in \wedge^p E$.

4. Remarque générale

Les classifications ultérieures seront faites en envisageant les rangs successifs croissants.

Désignons par k le corps de base ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Nous savons que l'ensemble, $\Sigma^p_{n,r}$, des p-vecteurs de rang r de $\wedge^p k^n$, est une réunion de trajectoires de $Gl(n)$.

La classification des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$ se réduit à celle des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$; en effet soient ω_1 et ω_2 deux éléments de rang r de $\wedge^p k^n$; alors, modulo une transformation linéaire convenable, on peut supposer leurs supports confondus en un même sous-espace S de dimension r; si une transformation linéaire, $h \in Gl(k, n)$, échange ω_1 et ω_2, elle laisse invariant S et sa restriction à S échange ω_1 et ω_2, envisagés en tant qu'éléments de $\wedge^p S$; la réciproque est évidente.

Il est clair qu'à chaque orbite de $Gl(k, r)$ dans $\Sigma^p_{r,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$) correspond biunivoquement une orbite de $Gl(k, n)$ dans $\Sigma^p_{n,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$), de *même codimension.*

La classification des p-vecteurs de rang r sera donc faite dans un espace de dimension r.

5. Remarques

Dans la suite, $I(D)$ désigne l'idéal de $\wedge E$, engendré par D, droite de l'espace vectoriel E de dimension finie et $\tilde{\omega}_D$ l'image du trivecteur ω par l'application canonique: $\wedge^3 E \to \wedge^3 E/D$.

5.1. — $\omega_D = 0 \Leftrightarrow \omega \in I(D)$.

5.2. — Si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes, et $\omega \in I(D_1) \cap I(D_2)$ alors ω est décomposable.

5.3. — Si $\tilde{\omega}_D$ est décomposable, alors l'image réciproque du support de $\tilde{\omega}$ par la projection canonique de E sur E/D est un 4-plan, $H(D, \omega)$, contenant D, que nous désignerons simplement par H_D pour ω fixé. D'autre part, à tout 3-plan P de H_D, ne contenant pas D, est attaché un élément ω_1, de $\wedge^3 P$ tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D)$.

5.4. — Si D et Δ sont deux droites telles que: $\omega \in I(\Delta)$, $\omega \notin I(D)$ et $\tilde{\omega}_D$ décomposable, alors Δ est contenue dans H_D.

En effet, si on désigne par $\tilde{\Delta}$ la projection de Δ sur E/D, il est clair que $\tilde{\omega}_D$ est un élément de l'idéal de $\wedge E/D$ engendré par $\tilde{\Delta}$.

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\wedge^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \ \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$
$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\wedge^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\wedge^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega-\omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.