Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

Autor: Lesca, Jacques

Kapitel: §2. Première connexion de Galois

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44585

Théorème F. — Soient (X, μ) un espace-mesure, (x_n) une suite *μ-équirépartie dans X* et α un nombre réel $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Alors *$\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toutes les sous-suites* de la suite x_n sont *μ-équiréparties dans X.*

1.5. *Généralisation*

Soit (X, μ) un espace-mesure. $A = (a_n^k)_{n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*}$ désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite $x = (x_n)$ de points de X est A-μ-équirépartie si, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C})$ la suite $n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$ qui existe, converge vers $\mu(f)$.

Supposons que pour tout *n la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$ converge* et en outre que $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$, alors les théorèmes A, B *se généralisent* sans difficultés pour la *A-μ-équirépartition.*

Si en outre il existe α positif tel que $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0(n^{-\alpha})$, alors les théorèmes C, D et E et F *se généralisent pour la A-μ-équirépartition.*

§ 2. Première connexion de Galois

2.1. *Définitions*

Soit X un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur $M_1^+(X)$. Considérons la relation suivante entre une topologie τ de $\mathscr{T}$ et une application f de $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathbf{C})$: « *L'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour τ* ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons $\tau \perp f$.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$ posons

$$B^* = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si T est une partie de $\mathscr{T}$ posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications $B \to B^*$ et $T \to T^*$ sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{T}$).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$, alors B^* est un *intervalle initial fermé*, par exemple si $B = \mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ par définition $B^* = [v \to [$ est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague v.*

Si T est une partie de $\mathscr{T}$, T^* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie B de $\mathscr{B}$ est *suffisante* si $B^* = \mathscr{C}_c^*$ ou si la topologie initiale dans M_1^+ correspondant à B est la topologie vague.

2.2. *Détermination de* $\mathscr{C}_c^{**}$

$\mathscr{C}_c^{**}$ est la plus grande partie de $\mathscr{B}$ telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

Proposition A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathscr{C}_c^{**} = \mathscr{C}_b (= \mathscr{C}_b^{**})$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $f \in \mathscr{C}_b$, d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour la topologie vague dans $M_1^+(X)$, et par conséquent $f \in \mathscr{C}_c^{**}$. Alors $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}_c^{**}$ et

$$\mathscr{C}_b^{**} \subset \mathscr{C}_b^{**} . \tag{1}$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de $\mathscr{C}_c^{**}$ est nécessairement continue. Soit f une fonction non continue au point $x_o \in X$. Alors il existe $c > 0$ tel que, dans tout voisinage de x_o il existe x tel que $|f(x) - f(x_o)| \geq c$.

A chaque voisinage V associons la famille $\varphi(V)$ des mesures de Dirac en chaque point x de V ou $|f(x) - f(x_o)| \geq c$. Alors $\varphi(V)$ est une base de filtre dans $\mathscr{T}$, filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point x_o pour la topologie vague. L'image par l'application $\mu \to \mu(f)$ de cette base de filtre ne converge pas vers $\mu_o(f)$.

Il en résulte que f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{**}$; on a donc

$$\mathscr{C}_c^{**} \subset \mathscr{C}_b . \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles $\mathscr{C}_c^{**}$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_b^{**}$.

§ 3. Seconde connexion de Galois

3.1. *Définitions*

Fixons une mesure $\mu_o \in M_1^+(X)$ et introduisons la nouvelle relation entre une topologie $\tau \in \mathscr{T}$ et une application $f \in \mathscr{B}$: « l'application $\mu \to \mu(f)$