

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | L'Enseignement Mathématique   |
| <b>Herausgeber:</b> | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique                              |
| <b>Band:</b>        | 17 (1971)   |
| <b>Heft:</b>        | 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  |
| <br>                |   |
| <b>Artikel:</b>     | SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT                                |
| <b>Autor:</b>       | Lesca, Jacques  |
| <b>Kapitel:</b>     | §1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-44585">https://doi.org/10.5169/seals-44585</a> |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Jacques LESCA

## § 1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

### 1.1. Définition d'une suite $\mu$ -équirépartie

Soient  $X$  un espace localement compact dénombrable à l'infini,  $\mu$  une mesure de  $M_1^+(X)$ , l'ensemble des mesures de Borel régulières, positives, de norme 1. Soit  $u = (u_n)$  une suite de points de  $X$ , nous dirons que  $u$  est  $\mu$ -équirépartie si pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$  (ensemble des fonctions réelles continues à support compact), la limite de la suite  $n \rightarrow 1/n \sum_{i=1}^n f(u_i)$  existe et vaut  $\mu(f)$ . (Voir [3])

### 1.2. Caractérisation des suites $\mu$ -équiréparties

Soit  $\mathcal{B}(X, \mathbf{C})$  l'ensemble de fonctions définies dans  $X$  et à valeurs complexes, boréliennes et bornées.

Soit  $\mathcal{C}_b(X, \mathbf{C})$  le sous-ensemble des fonctions continues de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{C})$ .

Soient  $\mathcal{R}(X, \mathbf{C})$  le sous-ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann pour la mesure  $\mu$  (en abrégé  $\mu$ - $\mathcal{R}$ -intégrable) c'est-à-dire des fonctions de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{C})$  dont l'ensemble des points de discontinuité ont une  $\mu$ -mesure nulle,  $\mathcal{R}'(X)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{R}(X, \mathbf{C})$  constitué par les fonctions caractéristiques à support compact, fonctions caractéristiques d'ensembles bornés dont la frontière à une  $\mu$ -mesure nulle (ensembles dits  $\mu$ - $\mathcal{R}$ -intégrables).

Nous dirons qu'une sous famille  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{C})$  est suffisante pour la mesure  $\mu$  si :

une suite  $u = (u_n)$  est  $\mu$ -équirépartie si et seulement si pour tout  $f \in \mathcal{F}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u_i) \right) = \mu(f).$$

*Théorème A.* — Soit  $X$  un espace localement compact dénombrable à l'infini et  $u = (u_n)$  une suite de points de  $X$  alors

(1) Les familles  $\mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$  (par définition),  $\mathcal{R}(X, \mathbf{C})$  et  $\mathcal{R}'(X)$  sont suffisantes pour la mesure  $\mu$ .

(2) Si en outre  $X$  possède une base topologique dénombrable  $\mathcal{R}(X, \mathbf{C})$  est la plus grande famille suffisante pour la mesure  $\mu$ .

Rappelons qu'un espace localement compact possédant une base topologique dénombrable est métrisable et par conséquent dénombrable à l'infini.

*Théorème B.* — Soit  $X$  un groupe abélien topologique localement compact. Alors la famille  $\Gamma$  de ses caractères continus est suffisante pour toute mesure  $\mu$ .

### 1.3. Existence de suites $\mu$ -équiréparties

Par la suite nous supposons que  $X$  est un espace *topologique localement compact possédant une base dénombrable* et muni d'une mesure  $\mu \in M_1^+(X)$ ; on désigne le tout par *espace-mesure*  $(X, \mu)$ .

Soit  $(X, \mu)$  un espace-mesure.  $X^{\mathbf{N}}$  désigne le produit d'une suite d'espaces identiques à  $X$  et  $\mu^{\mathbf{N}}$  la « mesure produit » de mesures toutes identiques à  $\mu$ .

La *Shift-Transformation*  $\sigma$  est l'application de  $X^{\mathbf{N}}$  dans lui-même qui à  $x = (x_1, x_2, \dots)$  fait correspondre  $\sigma(x) = (x_2, x_3, \dots)$ . Si  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  est une partie finie de  $\mathbf{N}$ , nous lui faisons correspondre  $X^J$  produit de  $r$  copies de  $X$ ,  $X^J$  est muni de la mesure produit notée  $\mu^J$ ;  $(X^J, \mu^J)$  est un *espace mesure*. La projection  $P_j: X^{\mathbf{N}} \rightarrow X^J$  est définie par

$$P_j(x) = P_j((x_1, \dots)) = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r})$$

$P_j$  est une application continue et « mesure invariante ».

*Théorème C.* — Soient  $(X, \mu)$  un *espace-mesure*,  $u = (u_n)$  une suite croissante d'entiers et  $J$  une partie finie de  $\mathbf{N}$ .

Alors pour  $\mu^{\mathbf{N}}$ -presque tout  $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ , la suite  $n \rightarrow P_J(\sigma^{u_n}(x))$  est  $\mu^J$ -équirépartie dans  $X^J$ .

Comme corollaire du Théorème C on obtient, en faisant  $J = \{1\}$  et  $u_n = n$ :  $\mu^{\mathbf{N}}$ -presque toute suite est  $\mu$ -équirépartie. En fait ce dernier résultat pourrait être déduit du *théorème ergodique individuel* (car  $\sigma$  est une applica-

tion *mélangeante* et par *conséquent ergodique*), ou alors encore plus simplement de *la loi forte des grands nombres*.

Si  $X$  est compact alors  $(X^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$  est un espace-mesure.

*Théorème D.* — Si  $(X, \mu)$  est un *espace-mesure* et si, en outre,  $X$  est *compact*, si  $(u_n)$  est une suite croissante d'entiers, alors, pour  $\mu^{\mathbb{N}}$ -presque tout  $x$  la suite  $n \rightarrow \sigma^{u_n}(x)$  est  $\mu_o^{\mathbb{N}}$ -équirépartie dans  $X^{\mathbb{N}}$ .

(Il semble que, mis à part le cas où  $u_n = n$ , le théorème D ne peut être déduit du théorème ergodique.)

#### 1.4. Espaces produit

Soit  $(X, \mu)$  et  $(Y, \nu)$  deux espaces-mesures, considérons l'espace mesure  $(X \times Y, \mu \times \nu)$ . L'espace  $\Omega = (X \times Y)^{\mathbb{N}}$  muni de la mesure  $\tau = (\mu \times \nu)^{\mathbb{N}}$  est naturellement identifié à l'espace produit  $X^{\mathbb{N}} \times Y^{\mathbb{N}}$  muni de la mesure produit  $\mu^{\mathbb{N}} \times \nu^{\mathbb{N}}$ .

Il résulte du théorème D que, pour  $\tau$ - presque toute suite  $((x_n, y_n))$  de  $X^{\mathbb{N}} \times Y^{\mathbb{N}}$ , la suite  $n \rightarrow (x_n, y_n)$  est  $\mu \times \nu$ -équirépartie. Ce résultat est précisé par:

*Théorème E.* — Soient  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  deux *espaces-mesures* et  $y = (y_n)$  une suite  $\nu$ -équirépartie dans  $Y$ . Alors, pour  $\mu^{\mathbb{N}}$ -presque tout  $x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ , la suite  $n \rightarrow (x_n, y_n)$  est  $\mu \times \nu$ -équirépartie dans  $X \times Y$ .

Si  $Z$  est un espace localement compact et  $f: X \times Y \rightarrow Z$  une application continue, la suite  $n \rightarrow f(x_n, y_n)$  est alors équirépartie dans  $Z$  pour la mesure « image par  $f$  de  $\mu \times \nu$  ». Utilisons cette dernière remarque, nous obtenons par exemple:

Si  $(y_n)$  est une suite de réels *équirépartie modulo 1* au sens habituel: (la suite des images dans  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  est *h-équirépartie*,  $h$  étant la mesure de Haar), alors la suite  $u_n y_n$  est *équirépartie modulo 1* pour  $\mu^{\mathbb{N}}$ -presque toute suite  $(u_n)$  d'entiers positifs,  $\mu$  étant une *mesure quelconque* dans l'ensemble des entiers positifs.

A une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$  d'une suite  $(x_n)$  faisons correspondre la fonction caractéristique de l'ensemble de ses indices ( $\{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ). L'ensemble des sous-suites de  $(x_n)$  est ainsi *identifié* à l'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$   $\mu_{\alpha}$  désigne la mesure définie dans  $\{0, 1\}$  par  $\mu_{\alpha}(\{1\}) = \alpha$ .

*Théorème F.* — Soient  $(X, \mu)$  un espace-mesure,  $(x_n)$  une suite  $\mu$ -équirépartie dans  $X$  et  $\alpha$  un nombre réel ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Alors  $\mu_\alpha^N$ -presque toutes les sous-suites de la suite  $x_n$  sont  $\mu$ -équiréparties dans  $X$ .

### 1.5. Généralisation

Soit  $(X, \mu)$  un espace-mesure.  $A = (a_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite  $x = (x_n)$  de points de  $X$  est  $A$ - $\mu$ -équirépartie si, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbf{C})$  la suite  $n \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$  qui existe, converge vers  $\mu(f)$ .

Supposons que pour tout  $n$  la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$  converge et en outre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$ , alors les théorèmes A, B se généralisent sans difficultés pour la  $A$ - $\mu$ -équirépartition.

Si en outre il existe  $\alpha$  positif tel que  $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0 (n^{-\alpha})$ , alors les théorèmes C, D et E et F se généralisent pour la  $A$ - $\mu$ -équirépartition.

## § 2. PREMIÈRE CONNEXION DE GALOIS

### 2.1. Définitions

Soit  $X$  un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des topologies sur  $M_1^+(X)$ . Considérons la relation suivante entre une topologie  $\tau$  de  $\mathcal{T}$  et une application  $f$  de  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$ : « L'application  $\mu \rightarrow \mu(f)$  est continue pour  $\tau$  ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons  $\tau \perp f$ .

Si  $B$  est une partie de  $\mathcal{B}$  posons

$$B^* = \{\tau \in \mathcal{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si  $T$  est une partie de  $\mathcal{T}$  posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications  $B \rightarrow B^*$  et  $T \rightarrow T^*$  sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{C})$  ou de  $\mathcal{T}$ ).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si  $B$  est une partie de  $\mathcal{B}$ , alors  $B^*$  est un *intervalle initial fermé*, par exemple si  $B = \mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$  par définition  $B^* = [v \rightarrow]$  est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague*  $v$ .