

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	17 (1971)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS
Autor:	Lebesgue, Henri
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-44571

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS

par Henri LEBESGUE

Article inédit écrit en 1905.

Avec des Notes de M. Gustave Choquet (G.C.)

Le sens des mots qui composent la langue mathématique se modifie constamment, comme cela arrive pour toutes les langues vivantes. L'exemple le plus frappant peut-être de ces modifications est celui du mot nombres qui a maintenant acquis un sens assez large pour qu'il soit nécessaire de distinguer les nombres entiers et les nombres fractionnaires, les nombres rationnels et les nombres irrationnels, les nombres positifs et les nombres négatifs, les nombres réels et les nombres imaginaires et complexes, les nombres finis et les nombres transfinis, etc. A chacune de ces catégories de nombres, correspond une catégorie de fonctions. C'est dire que le mot fonction, qui servit autrefois à désigner les puissances de la variable, a acquis lui aussi un sens extrêmement large.

Je n'ai pas l'intention d'étudier les modifications de sens du mot fonction; je vais essayer au contraire de mettre bien en évidence ce qui est resté constant dans la notion de fonction depuis deux siècles et de montrer que certains travaux récents, concernant ce qu'on appelle ordinairement les extensions les plus modernes de la notion de fonction, se rattachent tout naturellement à des questions qui se posèrent dès l'époque de l'invention du calcul différentiel et intégral.

CHAPITRE PREMIER

Dans les traités d'Analyse actuels on trouve cette définition: y est fonction de x si, à chaque valeur de x , correspond une valeur parfaitement déterminée de y .

Ainsi une fonction de variable réelle est une correspondance déterminée entre deux nombres dont l'un, la variable, peut être pris arbitrairement. Dans toutes les autres catégories de fonctions, ce qu'il y a d'essentiel, c'est

encore l'idée de correspondance déterminée ; seulement cette correspondance, au lieu d'être toujours établie entre nombres réels, peut être établie entre des nombres de nature quelconque, entre des grandeurs d'espèces particulières, entre certains êtres géométriques ou analytiques.

Comment cette notion de correspondance s'est-elle introduite en mathématique ?

A ne lire que nos cours de Mathématiques Spéciales, on serait tenté de croire que les fonctions sont utiles seulement à cause de leurs applications à la géométrie analytique, et que l'étude des fonctions dérive de celle de la géométrie. Sans méconnaître aucunement ni la beauté, ni l'intérêt des recherches de Géométrie, on peut dire que les applications géométriques de la théorie des fonctions n'en sont que les moins importantes. Les recherches géométriques ont puissamment contribué à la découverte du calcul infinitésimal mais elles n'ont pas mis en évidence l'idée de correspondance qui est l'essentiel dans l'idée de fonction. Tant que l'on ne s'est occupé que de Géométrie, on a pu remarquer qu'à une courbe géométrique¹⁾ était associée la correspondance entre l'abscisse y et l'ordonnée x , d'un quelconque de ses points ; seulement, comme on ne se proposait pas la recherche de propriétés communes à toutes les courbes mais bien la recherche de propriétés remarquables par leur élégance et non par leur généralité, ce qui importait c'était la forme analytique, spéciale au cas étudié, de la relation entre y et x .

On a même pu remarquer qu'aux courbes arbitraires, c'est-à-dire à celles que l'on obtient en traçant un trait à volonté, était aussi associée une correspondance entre y et x , et l'on a pu appeler « fonctions » ces correspondances. Mais leur étude apparaissait comme en dehors des mathématiques, tout aussi bien que celle des courbes arbitraires puisqu'elle ne paraissait pas susceptible de conduire à un énoncé ayant cette élégance qu'on considérait comme la marque nécessaire de tout fait mathématique.

1) Avant Descartes, la définition des *courbes géométriques* est fort peu précise. Descartes appelant « courbes géométriques » celles qu'on appelle aujourd'hui algébriques. Quant aux courbes non algébriques de définition simple telles que les spirales, la cycloïde, etc. Descartes les faisant rentrer dans la classe des «courbes mécaniques». Après Leibnitz cette division est à peu près abandonnée, sauf dans des recherches relatives à la théorie des équations. Leibnitz fait rentrer les courbes algébriques, et les courbes mécaniques, dans la classe des courbes géométriques parce que ses procédés s'appliquent aussi bien aux courbes algébriques qu'aux courbes transcendantes pourvu que les fonctions correspondantes soient développables en séries simples. C'est des courbes géométriques de Leibnitz, c'est-à-dire de celles dont on a dit parfois qu'elles étaient les seules susceptibles d'une définition précise, qu'il s'agit dans le texte ; les fonctions correspondantes sont les fonctions qu'Euler appelait « continues ».

Ce qui était important dans les études algébriques et géométriques, c'était la relation analytique entre x et y , d'où cette définition qu'adopte Lagrange, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*:

On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque.

CHAPITRE II

C'est à la physique que les mathématiques sont redevables de la notion générale de fonction; de l'idée de « Loi physique » dérive celle de fonction.

Que contient une loi physique ? D'abord une partie en quelque sorte qualitative: telles et telles conditions influent seules sur tel fait; puis une partie quantitative: l'énoncé précis de la correspondance entre le fait étudié et les circonstances qui influent sur lui.

La longueur d'une barre de fer à 0° et sa température actuelle sont les seules conditions qui influent sur sa longueur actuelle. Voici une loi physique réduite à sa partie quantitative. Il est certain que cette loi est inexacte; il est douteux même, tout influant vraisemblablement sur tout, qu'on puisse citer aucune loi dans laquelle, seules, des conditions en nombre fini interviennent; mais tout cela importe peu, il a suffi qu'on ait eu, à tort ou à raison, l'idée de lois physiques de la nature de celle que j'examine pour qu'on ait eu du même coup l'idée de fonction. La loi de dilatation indiquée plus haut, en langage mathématique moderne, s'énoncerait ainsi: la longueur actuelle d'une barre de fer est fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0° . Ici les idées de loi et de fonction se confondent, de même toute loi physique relative à des faits et conditions précisables en nombre conduit à une fonction.

Donner la partie quantitative de la loi de dilatation des barres de fer, ce serait dire à quelle fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0° est égale la longueur actuelle d'une barre de fer.

Il faut bien remarquer que rien ne nous permet d'affirmer avant expériences que cette fonction va s'exprimer à l'aide des signes de l'analyse; en d'autres termes, rien ne nous permet de dire à l'avance si cette fonction est ou non une de ces expressions de calcul dont parle Lagrange.

Le calcul des fluxions, dans lequel Newton considère les quantités comme engendrées par un accroissement continual à la manière de l'espace que décrit un objet en mouvement, c'est-à-dire dans lequel Newton guidé sans doute par ses recherches physiques qui ont tant contribué à la forma-

tion de l'idée de « Loi », fait intervenir la notion de correspondance établie physiquement, peut donc avoir une tout autre portée que le calcul des fonctions analytiques de Lagrange. Et quand même ces deux calculs auraient la même portée, il y aurait entre eux une différence analogue à celle qui distingue les deux modes d'exposition de la théorie des fonctions de variable complexe faite, soit d'après les vues de Riemann, soit d'après celles de Weierstrass et de M. Méray.

CHAPITRE III

En définissant les fonctions par l'idée de correspondance et non à l'aide d'expressions analytiques, Newton accomplissait un grand progrès mais en pratique, comme Leibnitz et tous ses contemporains, il ne s'occupe que des fonctions ayant une expression analytique simple. On ne conçoit guère d'ailleurs comment il aurait pu en être autrement. Newton réussissait à résumer tous les phénomènes astronomiques dans une seule loi et cette loi, malgré sa généralité, s'exprimait aussi simplement que possible à l'aide des symboles algébriques; un tel succès faisait naturellement penser qu'il était inutile de recourir à des fonctions compliquées pour l'explication des phénomènes naturels et en tous cas on était assuré qu'il y avait encore beaucoup à tirer de l'emploi des expressions analytiques simples.

Si la rigueur avait été de mode à cette époque comme de nos jours, la question de la possibilité d'exprimer analytiquement les fonctions définies physiquement se serait posée à chaque instant. Il était impossible, par exemple, de résoudre le problème de la brachystochrone sans supposer que la courbe à trouver existait et possédait certains éléments, tangente, rayon de courbure, etc., dont on savait démontrer l'existence pour les courbes à définition analytique, mais pour ces courbes seules.

Fort heureusement, les Bernouilli, Leibnitz, Newton, l'Hospital, ne se laissèrent pas arrêter par cette difficulté préjudiciable et il faut attendre jusqu'à D'Alembert et Lagrange pour que la question soit posée nettement à l'occasion du problème des cordes vibrantes¹⁾.

1) La discussion qui s'éleva à l'occasion de ce problème est intéressante à bien des égards. Cependant, comme les contradicteurs s'opposèrent pendant longtemps les mêmes arguments sans en apporter de nouveaux, la lecture des mémoires originaux est un peu fastidieuse. On aura une idée très suffisante de cette importante discussion, en lisant l'un des nombreux résumés qui en ont été faits, et en particulier celui qui constitue le premier paragraphe de l'historique que Riemann a mis au début de son célèbre mémoire sur les séries trigonométriques. Ce paragraphe est d'ailleurs presque tout entier emprunté au chapitre II de la première section du premier mémoire de Lagrange sur la propagation du son (*Œuvres*, tome 1^{er}).

D'Alembert avait prouvé que le déplacement y , supposé perpendiculaire à la position d'équilibre de la corde, du point de cette corde dont la distance à l'origine, dans la position d'équilibre est x , vérifie à un instant quelconque t , la formule.

$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x),$$

α est un coefficient connu, f est une fonction *impaire* de période $2l$, l est la longueur de la corde.

Ce résultat obtenu, D'Alembert avait recherché des expressions analytiques, définissant des fonctions ayant les propriétés ci-dessus indiquées.

Euler reprit aussitôt l'analyse de D'Alembert, mais il lui donna une tout autre portée. Pour lui, si la corde part du repos, f n'est assujettie qu'aux deux relations

$$f(z) + f(-z) = 0, \quad f(z) = f(z + 2l).$$

De plus il n'y a pas lieu, suivant Euler, de chercher pour f une expression analytique car f est déterminée immédiatement par une construction géométrique, dès que l'on connaît la courbe plane, position initiale de la corde.

Ainsi D'Alembert trouva par une analyse nouvelle l'intégrale du problème des cordes vibrantes, mais ce fut Euler qui comprit le rôle que doivent jouer les conditions initiales dans la détermination de celle des solutions qui convient à chaque cas particulier.

D'Alembert contesta l'exactitude du résultat d'Euler. En réalité il n'oppose rien de solide au raisonnement si simple et si convaincant d'Euler, mais il lui semble que la construction indiquée ne donnera une intégrale

de l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, dont dépend le problème des cordes vibrantes, que si elle conduit précisément à l'une de ces fonctions exprimables analytiquement qu'il s'était efforcé de déterminer. C'est que, comme je l'ai dit, les opérations du calcul infinitésimal n'étaient légitimées que pour les fonctions exprimables analytiquement; pour que la solution d'Euler puisse être considérée comme rigoureuse il aurait donc fallu qu'elle ne fasse intervenir que de telles fonctions. Or, elle faisait intervenir la fonction arbitraire attachée à la position initiale de la corde; rien ne prouvait que cette fonction possédait les dérivées nécessaires pour qu'elle fournisse une solution de l'équation considérée et même il était évident qu'elle ne les possédait pas dans les cas les plus simples: « La manière ordinaire, pour ne pas dire l'unique, de faire sortir une corde de son état de repos, c'est de la prendre par un de ses points et de la tendre en la tirant ce qui lui donne

la forme de deux lignes droites qui font un angle entre elles »,¹⁾ et dans ce cas le procédé d'Euler donnait pour f une fonction n'ayant pas de dérivée seconde pour certaines valeurs de la variable, par exemple pour O . De sorte que, pour chaque valeur de t , il existait des valeurs de x pour lesquelles $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ n'ayant pas de sens, ne satisfaisaient pas à

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A cette objection, qui n'est comme on ne voit, que la constatation dans un cas très simple de l'existence de ces ondes de discontinuité qui se rencontrent constamment, ni Euler, ni Lagrange qui prétendit plus tard légitimer la construction d'Euler, ne purent répondre victorieusement. D'Alembert continua à réclamer pour sa solution la plus grande généralité possible et à déclarer, procédé toujours commode et toujours employé, que dans les cas qu'il n'envisageait pas « le problème surpassait les forces de l'analyse connue ».²⁾

Il est inutile de parler ici de la méthode qu'employa Lagrange pour aborder le même problème, mais il est utile de dire pourquoi il regardait la méthode de D'Alembert comme tout aussi insuffisante que celle d'Euler. Lagrange fait à D'Alembert une objection analogue à celle que je faisais tout à l'heure à ceux qui s'occupaient de la brachystochrone; il lui reprochait d'admettre à priori que y était une expression analytique de x et de t . J'ai déjà dit que d'Alembert, tout en reconnaissant que le reproche était fondé, considérait qu'on ne pouvait guère faire mieux sans sortir du domaine des mathématiques.

Pour résumer, à l'occasion de la manière ordinaire de faire sortir une corde de son état de repos, nous voyons apparaître en mathématiques les courbes et fonctions arbitraires. La question de la légitimité des opérations ordinaires du calcul infinitésimal appliquées à ces fonctions se trouve alors posée et subsidiairement celle de la possibilité d'exprimer analytiquement de telles fonctions. Cette dernière question fût d'ailleurs posée d'une autre manière au cours de la discussion. Daniel Bernoulli, généralisant un résultat de Taylor, remarque que si l'on prenait

¹⁾ D'Alembert, Opuscules Mathématiques, Tome 1, page 41; voir aussi Tome IV, page 149.

²⁾ Il semble bien, d'après certains passages de Lagrange et certaines lettres citées par D'Alembert, que les opinions primitives d'Euler et de Lagrange, sur la généralité de la solution possible, se modifièrent assez pour se rapprocher beaucoup à la fin de celles de D'Alembert.

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} \cos \frac{\pi \alpha}{\rho} t + a_2 \sin \frac{2\pi x}{\rho} \cos \frac{2\pi \alpha}{\rho} t + \dots$$

on aurait une solution de l'équation des cordes vibrantes; et comme cette solution lui permettait de rendre compte de tous les phénomènes connus, il en concluait, suivant un procédé un peu rapide de raisonnement qu'on a souvent employé, que c'était la solution générale.

Euler protesta contre cette affirmation. Pour qu'elle soit exacte, il fallait qu'en faisant $t = 0$ dans y on eut l'équation de la courbe arbitraire position initiale de la corde; il aurait donc fallu que toute fonction arbitraire puisse s'exprimer par la formule

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{\rho} + \dots$$

c'est-à-dire en somme qu'il n'y ait pas de courbes arbitraires et qu'il n'y ait que des courbes géométriques.

Cela paraissait impossible, non seulement à Euler, mais encore à D'Alembert et Lagrange et même ils croyaient le prouver.

Admettant qu'on peut différencier terme à terme une série, ils en concluaient que la série indiquée ne pouvait pas représenter, par exemple, une position initiale polygonale de la corde.

CHAPITRE IV

Toutes les fonctions dont il a été question jusqu'ici sont des fonctions *continues*, au sens actuel du mot. C'est Fourier qui montra l'intérêt des fonctions *discontinues*.

Le premier des problèmes qui conduisit Fourier, dans sa théorie de la chaleur, à l'emploi des séries trigonométriques se ramène au suivant: les

deux demi droites $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, sont maintenues à la température 0, la

portion $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ de l'axe des y est maintenue à la température 1, étudier la distribution des températures stationnaires dans la portion du plan, supposé isotrope, limitées par les droites indiquées. Fourier montra que s'il est possible de déterminer les constantes a, b, c , etc., de manière que

$V(x, y)$ se réduise à 1, quand on a $x = 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$, la température

$V(x, y)$ cherchée est donnée par la formule

$$V = a e^{-x} \cos y + b e^{-3x} \cos 3y + c e^{-5x} \cos 5y + \dots$$

Fourier est ainsi conduit à remarquer que la série

$$\frac{4}{\pi} \left(\cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \dots \right)$$

a pour somme 1 quand y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et qu'elle a pour somme -1 quand y est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$. Ainsi, voilà une série *d'expressions analytiques dont la somme est une fonction discontinue*, premier résultat. Fourier remarque d'ailleurs qu'on aurait pu supposer d'autres données sur $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ de Oy . Si l'on avait supposé $V = 1$ de $-\frac{\pi}{2}$ à 0, et $V = 0$ de 0 à $+\frac{\pi}{2}$, le problème aurait encore été résolu par une série trigonométrique. Ici *les données sont discontinues et le problème ne sort pas du domaine des mathématiques*, second résultat.

Mais le premier problème de Fourier prouve plus encore: *il se peut que des fonctions discontinues interviennent naturellement dans la solution de problèmes dont toutes les données sont continues*¹), troisième résultat.

Cela suffisait pour inciter les mathématiciens à réfléchir à l'étendue de la notion de fonction, à la puissance de représentation des expressions analytiques et à la nécessité de définir la continuité autrement que le faisait Euler.

Cela suffit aussi pour que ceux qui s'occupent des fonctions les plus générales aient l'espérance que certaines de leurs recherches puissent servir quelque jour la Physique mathématique.

CHAPITRE V

Cauchy, dans son cours de l'Ecole polytechnique, définit les fonctions par les correspondances. Il définit à la manière aujourd'hui classique la continuité en un point et dans un intervalle. Il semble cependant que Cauchy ne considère encore que les correspondances qu'on obtient par des

¹) En apparence du moins car la discontinuité de $V(x, y)$ pour $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$, était évidente.

procédés analytiques car, immédiatement après la définition du mot fonction, il divise les fonctions en explicites et implicites suivant la forme de la relation définissant cette fonction. De plus, Cauchy ne cite jamais que des fonctions définies par des procédés analytiques et il parle parfois sans explications de ce que devient une fonction quelconque de variable réelle quand on met un nombre complexe à la place de cette variable.

Il faut dire cependant que la restriction apportée par Cauchy à l'idée générale de fonction n'est jamais formulée explicitement et qu'elle n'intervient implicitement que dans peu de raisonnements.

C'est Dirichlet et Riemann qui, comme l'on sait, insistèrent sur l'intérêt qu'il pouvait y avoir à considérer des correspondances définies par n'importe quel procédé; ils montrèrent par des exemples l'extraordinaire étendue de la notion de fonction.

Mais déjà Cauchy avait fait des raisonnements indépendants de toute définition analytique des fonctions; en particulier il avait démontré en précisant un raisonnement d'Euler que toute fonction continue est la dérivée d'une autre fonction; Cauchy définissait l'intégrale des fonctions continues. Il légitimait donc l'emploi d'une des deux opérations fondamentales du calcul infinitésimal pour une catégorie très faste et très importante de fonctions. Dirichlet, puis surtout Riemann, élargirent la catégorie des fonctions auxquelles on peut attacher une intégrale. Ils augmentaient ainsi l'importance de l'intégration et sa puissance. M. Darboux, à son tour, a augmenté encore cette puissance en attachant à chaque fonction bornée, non plus une seule intégrale mais une intégrale par défaut et une intégrale par excès.

Dans ces travaux, on voit apparaître la théorie des ensembles comme auxiliaire de la théorie des fonctions. Cauchy avait, comme auparavant Fourier, intégré quelques fonctions discontinues. Lipschitz rapporte que Dirichlet, généralisant le procédé de Cauchy, indiqua une méthode qui permet d'intégrer les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité n'a qu'un nombre fini de points limites. La généralisation des méthodes de Cauchy et de Dirichlet conduit naturellement à des résultats assez généraux, mais qui ne s'appliquent qu'aux fonctions dont les points de discontinuité forment un ensemble réductible au sens de M. G. Cantor.

La méthode de Riemann est tout autre; cependant ce sont encore des propriétés de l'ensemble des points de discontinuité qui distinguent les fonctions auxquelles s'applique la méthode. Ces propriétés font intervenir ce que l'on appelle aujourd'hui la mesure des ensembles. Cette notion nouvelle de mesure permet de caractériser simplement les fonctions inté-

grables au sens de Riemann; ce sont celles dont les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle.

La théorie des ensembles de points a permis d'élargir encore, et très considérablement, la classe des fonctions auxquelles on peut attacher une intégrale, fonctions qu'on peut appeler sommables.

Ces fonctions se distinguent encore des autres par des propriétés relatives aux ensembles, mais il ne suffit plus de faire intervenir, pour les caractériser, leurs points de discontinuité car elles sont, en général, discontinues partout.

Dans la classe des fonctions sommables rentrent toutes les fonctions exprimables analytiquement, continues ou non. L'intégration a acquis une portée extrêmement générale.

Cependant une restriction subsiste, restriction qui paraît devoir être très limitative, dans beaucoup de recherches; pour que la méthode d'intégration des fonctions sommables s'applique, il faut qu'il s'agisse de fonctions bornées. La méthode s'applique bien aussi à quelques fonctions non bornées, mais ce sont en réalité des fonctions assez particulières¹⁾; de plus, pour ces fonctions, cette méthode n'est pas la généralisation de celles qu'ont données Cauchy, Dirichlet et Riemann pour certaines fonctions non bornées et auxquelles se rapportent des travaux de MM. Jordan, Harnack, Hölder, De la Vallée Poussin, Stoltz, Moore, Pierpont.

Dans ces recherches on s'était heurté tout d'abord à une difficulté un peu singulière; la définition qui paraissait naturelle, conduisait à attribuer à la somme de deux fonctions une intégrale différent parfois de la somme des intégrales des deux fonctions.

On a pu délimiter une classe de fonctions pour lesquelles cette difficulté n'apparaît pas.

Les différentes méthodes employées pour définir l'intégrale sont d'accord entre elles lorsqu'elles s'appliquent simultanément, mais on ne les a pas

(¹) Cette restriction nous semble assez curieuse aujourd'hui. En fait, dans ses « Leçons sur l'intégration » parues en 1904, Lebesgue avait déjà donné la définition des fonctions sommables quelconques (p. 115), mais sans y insister beaucoup; les « fonctions assez particulières » dont il parle ici semblent donc bien être les fonctions sommables non bornées les plus générales.

Les restrictions qu'il exprime semblent venir du fait qu'il avait en vue d'autres généralisations de l'intégrale. Les auteurs qu'il cite plus loin permettent de penser qu'il pensait à deux sortes d'extensions possibles:

L'une a plus tard été développée par M. Arnaud Denjoy sous le nom de *totalisation*. L'autre qui a pour origine la notion de valeur principale, a été partiellement développée par M. Jacques Hadamard, mais n'a trouvé son véritable cadre que dans la Théorie des Distributions de M. Laurent SCHWARTZ.

encore réunies dans une méthode unique; c'est dire qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette direction. Les difficultés que l'on rencontre n'étant pas sans analogie avec celles qui s'opposaient à la sommation des séries divergentes, il est permis d'espérer que les progrès faits récemment dans ce dernier ordre d'idées pourront servir à étendre encore la portée de l'intégration.

CHAPITRE VI

On pourrait se demander si, à côté des généralisations de l'intégrale que je viens d'examiner, ne pourraient pas s'édifier d'autres généralisations tout aussi naturelles et tout aussi utiles. Il serait imprudent de déclarer cela impossible, mais c'est peu vraisemblable.

Plaçons-nous d'abord à un point de vue purement analytique. L'intégrale est un nombre attaché à la fonction intégrée f et à l'intervalle d'intégration (a, b) ; pour que ce nombre puisse servir, il faut, de toute nécessité, qu'il satisfasse à certaines conditions simples telles que la suivante: l'intégrale de $f + \varphi$ dans (a, b) doit être la somme des intégrales de f et de φ dans (a, b) . Or, il suffit d'énoncer six conditions, présentant toutes, sauf une, les caractères de simplicité et de nécessité de celle que je viens d'indiquer, pour que l'intégrale des fonctions sommables soit entièrement déterminée.

En examinant les choses du point de vue géométrique, on est conduit aussi à avoir pleine confiance, je crois, dans les généralisations de l'intégrale. On sait les rapports entre les notions d'intégrale et d'aire; à mesure que se précisait la notion d'intégrale, celle d'aire se précisait aussi.

Les recherches sur la motion d'aire, les recherches de Riemann et de P. du Bois Reymond sur les conditions d'intégralité, les recherches de MM. Cantor, Peano, Jordan et Borel sur les ensembles de points et les recherches sur les intégrales multiples, que je laisse de côté ainsi que celles sur l'intégration et la différenciation sous le signe \int et celles sur l'intégration par parties, toutes ces recherches conduisent naturellement à une généralisation des notions de longueur, d'aire et de volume, qui est la notion de mesure d'un ensemble.

On sait maintenant attacher une mesure à presque tout ensemble. Du moins on ne connaît aucun ensemble auquel ne s'applique pas les procédés de mesure. Et la mesure définie par ces procédés est la seule qui satisfasse à la fois à ces deux conditions:

- 1) La mesure de deux ensembles égaux est la même,

- 2) Si l'on forme un ensemble par la réunion d'autres n'ayant pas de points communs, deux à deux, la mesure de l'ensemble somme est la somme des mesures; c'est-à-dire le caractère de nécessité qu'à la définition actuelle de la mesure.

Or, dans le cas des fonctions sommables quelconques l'intégrale est la mesure d'un ensemble de points attaché à la fonction et qui est la généralisation immédiate de l'ensemble des points du domaine dont il faut prendre l'aire pour avoir l'intégrale quand la fonction à intégrer est continue. Notons encore que, de ce point de vue géométrique, le cas particulier simple des fonctions intégrables au sens de Riemann se différencie nettement du cas général et que les intégrales par excès et par défaut de M. Darboux correspondent exactement aux étendues extérieures et intérieures, définies par MM. Jordan et Peano de l'ensemble associé à la fonction. J'ajoute que l'intégrale des fonctions sommables se construit à partir des mesures linéaires de certains ensembles comme l'intégrale des fonctions continues se construit à partir des longueurs des segments auxquels se réduisent ces ensembles dans ce cas particulier.

CHAPITRE VII

De ces travaux relatifs à la fois à l'intégration et aux notions de longueur d'aire et de volume, on peut rapprocher les recherches concernant les longueurs des courbes et les aires des surfaces. Les géomètres anciens prenaient les plus grandes précautions dans l'étude de ces longueurs et de ces aires; à vrai dire ils ne les définissaient pas, mais ils énonçaient avant les démonstrations toute une suite si précise d'axiomes et de principes que cela équivaut à la définition la plus minutieuse. C'est ainsi que M. Peano a pu rétablir les définitions adoptées par Archimède: la longueur (ou l'aire) d'une courbe (ou surface) convexe est la limite inférieure de la longueur (ou de l'aire) des lignes polygonales (ou surfaces polyédrales) circonscrites et la limite supérieure des inscrites. On avait perdu l'habitude de procéder avec précautions dans ces questions délicates surtout dans les livres d'enseignement, de sorte que, à l'époque où j'étais au collège, on démontrait victorieusement que $\pi = 2$.

Le procédé était des plus simples. La longueur de la circonférence de rayon R est $2\pi R$, π restant à déterminer. Ceci posé, soit une demi-circonférence de diamètre AB de centre O et de rayon R . Sa longueur πR est aussi celle de la courbe formée par les deux demi-circonférences de dia-

mètre $A O$ et $O B$. En opérant de même sur ces deux demi-circonférences on a quatre demi-circonférences de longueur totale πR , et ainsi de suite. Les courbes successives ainsi formées ont toutes pour longueur πR . Elles tendent manifestement vers $A B$ de longueur $2 R$, donc $\pi = 2$.

Ce raisonnement, certes n'était pas rigoureux mais il l'était tout autant que ceux qu'on nous faisait pour obtenir la longueur de la circonference, l'aire latérale du cône ou l'aire de la sphère, parce qu'on négligeait de définir ces longueurs et aires ou d'en énoncer les propriétés. Il nous était tout à fait impossible de voir en quoi notre raisonnement péchait.

Il suffit d'ouvrir les ouvrages élémentaires tout récents pour voir les progrès qui ont été réalisés. Dans ces ouvrages, on définit d'une manière assez précise les longueurs ou les aires dont on parle, on démontre ou on affirme à leur sujet assez de propriétés, pour que les collégiens actuels ne s'étonnent pas que π diffère de 2. Et cela ne me paraît pas négligeable; s'il n'est pas nécessaire de soulever devant les élèves toutes les difficultés, s'il n'est pas nécessaire de leur tout prouver, il est indispensable de ne leur donner comme démonstration que de véritables raisonnements, modèles que les étudiants doivent pouvoir copier sans crainte.

Dans les raisonnements sur les longueurs et aires non définies, il fallait bien introduire subrepticement les définitions et propriétés qu'on n'énonçait pas, de sorte que l'on n'enseignait même pas de la logique formelle; mais ce qui est pis, c'est qu'on faisait raisonner les élèves sur des mots sans leur en faire analyser le contenu. On risquait de former ainsi des gens, raisonnant toujours logiquement ou à peu près, mais à partir de prémisses quelconques, choisies au hasard, sans aucun examen. On sait que ce défaut est fréquent chez ceux qui, s'occupant particulièrement de mathématiques, sont habitués à raisonner à partir de vérités à énoncés précis et rigoureux qu'ils n'ont pas besoin d'examiner à nouveau; mais s'il y a là une déformation de métier assez difficile à éviter, il faut du moins écarter tout ce qui tendrait à transmettre cette déformation à tous ceux qui reçoivent l'enseignement secondaire.

CHAPITRE VIII

Il importe d'abord de se rendre bien compte de ce que c'est qu'une courbe ou une surface.

On sait que Riemann, dans ses travaux sur les fondements de la géométrie, distingue tout d'abord le nombre de dimensions de l'espace dont il s'occupe. Ses considérations furent reconnues insuffisantes lorsque

M. Cantor eut démontré qu'il y avait autant de points dans le plan que sur la droite; d'une façon plus précise qu'on pouvait établir une correspondance biunivoque entre les points de la droite et ceux du plan. Cependant, si l'on tient à respecter certaines continuités, on ne peut établir de correspondances biunivoques qu'entre les points de deux espaces ayant le même nombre de dimensions; cela permet de compléter les raisonnements de Riemann. C'est à ces recherches sur les correspondances entre espaces dont les nombres de dimensions sont différents que M. Peano a rattaché la construction de sa fameuse courbe passant par tous les points d'un carré ou d'un cube. Depuis, M. Hilbert et divers autres géomètres ont défini plus simplement des courbes jouissant de propriétés analogues; bien entendu, on peut définir également des surfaces ayant ces propriétés.

Dans ces travaux, une courbe ou une surface est définie en assujettissant x , y , z à être égales à des fonctions continues d'un ou de deux paramètres variables. C'est en partant de la même définition que M. Jordan a démontré que toute courbe plane fermée et sans point multiple divise le plan en deux régions. D'où la définition possible des domaines plans. M. Schönfliess a poursuivi l'étude des propriétés fondamentales de ces domaines dans toute une suite de mémoires qui tendent à donner une base solide aux considérations où intervient l'« analysis situs ».

On peut adopter pour les courbes et surfaces diverses autres définitions; une courbe, par exemple, peut non seulement être la trajectoire d'un point comme dans la définition précédente, mais ce peut être aussi une *longueur sans largeur* ou une *limite de surface* ou, comme en géométrie analytique, *l'ensemble des points représentant une fonction continue*. Je me contente de signaler cet ordre de recherches¹⁾ pour revenir plus vite aux longueurs, aires et volumes.

Je ne parlerai pas des travaux sur la longueur d'un segment; ce sont les travaux sur les fondements de la géométrie; je vais encore dire un mot sur la définition des aires, des domaines plans. Cette définition résulte dans certains cas, de la définition de l'intégrale des fonctions d'une variable. Dans tous les cas elle résulte de la définition des intégrales doubles et de la définition des mesures des ensembles; mais on peut aussi définir l'aire

¹⁾ La notion de courbe et de surface fut très étudiée quelques années plus tard par S. JANISZEMSKI, URYSOHN, MENGER, etc... D'innombrables travaux y sont consacrés, voir par exemple la collection des *Fundamenta Mathematicae* (Varsovie) depuis 1920.

Lebesgue lui-même participa à l'étude la notion de variété n -dimensionnelle par une très belle définition de la dimension qui reste un des joyaux de son œuvre. G. C.

directement en se donnant à priori les conditions essentielles auxquelles elle doit satisfaire.

Si l'on veut que les aires de deux domaines égaux soient égales, si l'on veut que l'aire du domaine formé par la réunion de deux autres soit la somme des aires de ces deux autres, l'aire est déterminée à un multiplicateur près qui correspond au choix laissé arbitraire de l'unité d'aire pour tous les domaines que M. Jordan appelle les domaines quarrables. Quant aux autres domaines, leur aire n'est pas déterminée par les conditions précitées.

Si l'on considère un domaine formé par la réunion d'une infinité de domaines composants, l'aire précédemment définie du domaine total est la somme des aires des domaines constituants, quand il s'agit de domaines quarrables; mais il est impossible de profiter de l'indétermination de l'aire des domaines non quarrables pour que, dans tous les cas, l'aire d'un domaine D soit la somme des aires des domaines en lesquels on peut décomposer D .

On voit par ces résultats que les problèmes qui se posent sont moins simples qu'on aurait pu le croire. J'ajoute que cette manière de poser le problème des aires, qui peut évidemment être aussi utilisée pour les volumes, est susceptible d'être employée dans un ouvrage élémentaire, comme l'ont fait voir MM. Gérard et Nievenglowski, d'une part, M. Hadamard, de l'autre.

CHAPITRE IX

Lorsqu'on se borne aux courbes convexes, ou décomposables en courbes convexes, la définition d'Archimède convient; il est vrai que les polygones circonscrits n'existent pas toujours, si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont les côtés sont des tangentes à la courbe, mais ils existent toujours si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont chaque côté n'a qu'un point commun avec la courbe. D'ailleurs, les méthodes qui réussissent dans le cas de la circonférence permettent de démontrer l'identité des deux limites qui interviennent dans la définition d'Archimède. Mais si l'on prend une courbe quelconque, les mêmes raisonnements ne conviennent plus. Après que Paul Du Bois Reymond eût signalé les difficultés que l'on rencontre dans la définition des longueurs, Ludwig Scheeffer, puis M. Jordan, reprirent la question. Voici leur résultat essentiel: si l'on considère une suite quelconque de lignes polygonales inscrites dans une courbe et dont les longueurs des côtés tendent vers zéro, les longueurs de ces lignes tendent vers une limite, finie ou non, indépendante de la suite de lignes choisies.

Cette limite est appelée la longueur de la courbe. Les courbes à longueur finie sont dites rectifiables. M. Jordan a montré de plus qu'une courbe était rectifiable ou non suivant que les trois coordonnées x, y, z , étaient toutes trois, ou non, des fonctions à variation bornée du paramètre variable; une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes.

Il semble que ces travaux résolvent toute la question, mais de nombreux mémoires relatifs à la rectification des courbes, en particulier ceux de M. Study, soulèvent bien d'autres points. Une question à laquelle on pense de suite, et qu'avait déjà abordée Scheeffer, est celle du calcul de la longueur. Voici un résultat simple:

Supposons que les dérivées x', y', z' aient toujours un sens et soient finies, alors la longueur finie ou infinie de la courbe est toujours l'intégrale de $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

Voilà un exemple qui montre l'intérêt que peuvent avoir les généralisations de l'intégrale.

Pour passer aux aires, il est bon de remarquer que la définition adoptée pour les longueurs est équivalente à celle-ci: la longueur d'une courbe C est la plus petite des limites des longueurs des lignes polygonales tendant vers C . Il sera donc naturel de dire: l'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales tendant vers S . Cette définition est d'accord avec les définitions adoptées pour les cas particuliers qu'on examine généralement, car, avec elle, l'aire de $z = f(x, y)$ est l'intégrale de

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant supposées continues.

Qu'est-ce qui va correspondre à l'évaluation approchée de la longueur d'une courbe à l'aire de polygones inscrits? Divisons la surface en morceaux. Soit C le contour d'un morceau, nous appellerons aire minima de C la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales ayant un seul contour qui tend vers C . Comme valeur approchée de l'aire d'une surface on peut prendre la somme des aires minima des contours limitant les morceaux de la surface. Seulement, comme on pouvait s'y attendre d'après ce qui se passe dans le cas du plan, on ne peut prendre les contours que dans une famille spéciale de courbes, laquelle contient d'ailleurs toutes les courbes rectifiables.

On voit que les choses se compliquent beaucoup, mais on ne peut guère espérer arriver comme dans le cas des courbes à prendre pour définition générale une définition voisine de celle d'Archimède, car M.M. Peano et Schwartz ont montré à peu près au même moment, que même pour le cas simple du cylindre de révolution les surfaces polyédrales inscrites ont des aires qui ne tendent pas nécessairement vers l'aire du cylindre quand on fait tendre vers zéro toutes les arêtes de ces surfaces polyédrales.

Il est vrai que l'on peut cependant adopter encore la définition d'Archimède, à condition de dire que l'on ne considère que des surfaces polyédrales convexes, mais comme il existe des surfaces très simples, le paraboloïde hyperbolique par exemple, qui ne sont pas décomposables en morceaux convexes, il est indispensable de ne pas s'en tenir à la définition d'Archimède.

La définition que j'ai indiquée plus haut n'a pas encore été beaucoup étudiée, on ne sait presque rien sur la représentation paramétrique des surfaces d'aire finie, ni sur l'expression de l'aire.¹⁾

D'autres définitions ont été proposées. Je laisse de côté celles dans lesquelles on a essayé de considérer des surfaces polyédrales inscrites et assujetties à certaines conditions supplémentaires. Ces définitions, presque toutes insuffisantes, même pour le cylindre, ne s'appliquent que dans des cas peu généraux et sont très arbitraires. Je laisse aussi de côté la définition proposée par Hermite, et qui est reproduite dans beaucoup de traités d'analyse français parce qu'elle ne s'applique qu'aux surfaces ayant des plans tangents et parce que, faisant intervenir les axes de coordonnées, c'est seulement le calcul de l'aire qui montre que cette aire est indépendante des axes choisis.

Je veux dire quelques mots d'une définition proposée indépendamment par M.M. Laisant et Peano. Considérons un contour fermé C ; on peut, au moins dans les cas simples, trouver un contour plan C_1 tel que les projections de C et de C_1 sur un même plan quelconque de l'espace limitent toujours des aires égales. L'aire de C_1 est l'aire gauche de C ; on voit de suite l'analogie entre l'aire gauche d'un contour et la distance de deux points. Cette analogie comprise, on devine que l'on va appeler aire d'une surface la limite supérieure des nombres obtenus en divisant la surface en morceaux d'une façon quelconque et en attachant à chaque division la

¹⁾ De très nombreux travaux ont éclairé beaucoup ces questions, bien qu'on manque encore d'une théorie simple; les travaux actuels sur l'aire des surfaces sont encombrés d'un arsenal très lourd de notions dont toutes ne sont sans doute pas définitives. Voir T. RADO, Length and Area, Colloquium Publications, Princeton 1948 (572 p.) et L. CESARI, Surface Area, Annals of Math. Study, Princeton 1956 (593 p.). G. C.

somme des aires gauches des contours de ces morceaux. M. Fréchet a signalé un rapprochement curieux entre l'aire gauche et l'aire des domaines plans en montrant que l'aire gauche peut être définie simplement par certaines de ses propriétés, analogues à celles que l'on peut employer pour définir l'aire des domaines plans.

Pour en finir avec ces questions sur lesquelles j'ai longuement insisté parce qu'on les considère volontiers comme tranchées depuis longtemps alors qu'il est très facile d'apercevoir combien il reste à faire, je signalerai une très jolie définition employée récemment par M. Minkowski et qui avait été aperçue dès 1854 par Borchardt.

Les définitions dont j'ai parlé jusqu'ici sont des traductions en langage mathématique des opérations que l'on fait pour mesurer pratiquement une courbe ou une surface en la remplaçant par une ligne polygonale ou des surfaces polyédrales voisines mais on peut aussi opérer pratiquement d'une autre manière: supposons qu'il s'agisse de mesurer une courbe ou une surface réalisées matériellement sous forme de fil, ou de feuilles; on pourra évaluer de bien des manières le volume de l'objet, par exemple à l'aide du poids. Le quotient du volume par l'aire de la section du fil ou par l'épaisseur de la feuille est la longueur ou l'aire, au point de vue pratique, de l'objet considéré.

C'est en traduisant ce procédé opératoire en langage mathématique que M. Minkowski a été conduit à toute une suite de définitions qui lui ont permis de renouveler le problème des isopérimètres.

La comparaison de toutes ces définitions reste à faire.

CHAPITRE X

Je reviens maintenant aux opérations fondamentales de l'analyse; après l'intégration, la dérivation.

Autrefois on plaçait toujours le calcul différentiel avant le calcul intégral; dans son cours d'analyse, M. Jordan définit l'intégrale avant la dérivée. Cela peut se justifier: si l'on recherche les origines géométriques de la dérivation et de l'intégration, on trouve que celles de l'intégration précédèrent, et de beaucoup, les autres; puis l'intégration est plus générale que la dérivation; puis encore bien des résultats sur la dérivation se déduisent immédiatement de ceux relatifs à l'intégration.

On dit parfois, d'une façon un peu trop absolue, que les géomètres des siècles derniers admettaient que toute fonction a des dérivées. J'ai eu

l'occasion de rappeler que cette existence fut mise en doute dès la querelle des cordes vibrantes et qu'on avait alors considéré des fonctions n'ayant pas partout des dérivées; de même Cauchy savait bien que la fonction qu'il notait $+ \sqrt{x^2}$ n'avait pas de dérivée pour $x = 0$. Ce qui est vrai, c'est qu'on a cru pendant longtemps qu'une fonction avait en général une dérivée; parmi les très nombreuses démonstrations qui ont été proposées pour le prouver je citerai celles d'Ampère, de Duhamel, de Gallois, de Bertrand, de Gilbert, intéressantes soit par le nom de l'auteur, soit par la méthode employée.

La croyance à l'existence d'une dérivée n'était pas sans fondement analytique; il faut chercher longtemps pour trouver une *expression de calcul* qui n'ait pas en général une dérivée, et pour presque tous les mathématiciens d'il y a cinquante ans une fonction était une expression de calcul. Aussi le raisonnement par lequel Lagrange prétendait démontrer que toute fonction est développable en série de Taylor, raisonnement qu'il ne faudrait peut-être pas abandonner autant qu'on l'a fait depuis Cauchy, constitue-t-il l'une des meilleures démonstrations de l'existence de la dérivée, parce qu'il s'appuie sur ce fait qu'il s'agit d'une expression de calcul. Au même point de vue toute preuve de la possibilité de dériver une expression de calcul est une démonstration de l'existence des dérivées et comme le passage à la limite est la seule opération qui soulève vraiment des difficultés, les théorèmes sur la dérivation terme à terme des séries, dont je parlerai un peu, bien peu, dans la suite, sont des théorèmes sur l'existence de la dérivée.

CHAPITRE XI

Riemann a indiqué dans son enseignement, comme conséquence de ses considérations sur l'intégration, l'existence de fonctions continues pour lesquelles, dans tout intervalle, il y a des points où la dérivée n'existe pas.

Mais ces points sont encore exceptionnels car ce sont les points de discontinuité d'une fonction intégrable. M. Weierstrass fit connaître le premier exemple de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point; depuis, les exemples de telles fonctions ont été multipliés.

Doit-on renoncer à l'emploi si commode de la dérivée dans l'étude des fonctions continues les plus générales? P. Du Bois Reymond et M. Dini ne le pensèrent pas et ils définirent quatre nombres, les nombres dérivés ou les extrêmes oscillatoires de la fonction, qui peuvent dans bien des cas remplacer la dérivée.

Ces nombres sont les plus grandes et plus petites limites du rapport incrémentiel quand on fait tendre l'accroissement de la variable vers O positivement et négativement; la signification géométrique de ces nombres est évidente. MM. Dini, Scheeffer, puis M. Volterra ont montré que la connaissance de l'un de ces nombres dérivés suffit pour déterminer la fonction tout comme lorsqu'il s'agit de la dérivée ordinaire; mais une restriction est nécessaire au raisonnement, il faut que les nombres dérivés soient bornés. M. Hans Hahn vient de montrer tout récemment que cette restriction est nécessaire aussi pour l'exactitude du résultat, même s'il s'agit de la dérivée ordinaire, car M. Hahn a construit deux fonctions ayant partout la même dérivée (égale en certains points à $+\infty$) et dont la différence n'est pas constante.

En supposant que les nombres dérivés soient bornés et intégrables au sens de Riemann, on peut remonter par l'intégration d'un nombre dérivé à la fonction primitive. Mais c'est une restriction supplémentaire que de supposer les nombres dérivés intégrables au sens de Riemann, car M. Volterra a construit une fonction continue dérivable dont la dérivée est bornée et n'est pas intégrable.

Pour la recherche des fonctions primitives, une généralisation de l'intégrale, plus large que celle de Riemann, était donc nécessaire. L'intégration des fonctions sommables permet toujours de remonter d'une dérivée bornée ou d'un nombre dérivé borné à la fonction primitive; mais elle ne le permet pas toujours pour les fonctions non bornées. Ainsi, *on ne sait pas encore remonter dans tous les cas d'une dérivée à la fonction primitive.*¹⁾

CHAPITRE XII

Voici maintenant des résultats relatifs à l'existence de la dérivée ordinaire.

On sait que Dirichlet a distingué parmi les fonctions continues, celles qui n'ont qu'un nombre fini de maxima et de minima. Une remarque très

¹⁾ Les travaux de M. Arnaud Denjoy ont apporté à cette question une réponse définitive et ses méthodes, basées sur une synthèse de l'intégrale de Lebesgue et des propriétés descriptives des fonctions découvertes par R. BAIRE ont trouvé de nombreuses applications à d'autres questions, en analyse et en géométrie. (Voir plus loin l'application aux séries trigonométriques.). Son « Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse », paru de 1915 à 1917 en plusieurs parties dans divers périodiques, a été republié sous forme de livre en 1954 (Gauthier-Villars).

simple et très heureuse a permis à M. Jordan d'étendre à toute la classe des fonctions à variation bornée beaucoup des propriétés des fonctions de Dirichlet. M. Dini et les géomètres italiens ont dans diverses recherches généralisé différemment la classe des fonctions de Dirichlet; il distingue des autres les fonctions $f(x)$ pour lesquelles on peut choisir la constante K de manière que $f(x) + Kx$ soit une fonction de Dirichlet. Cette distinction a conduit M. Dini à diverses remarques concernant l'existence de la dérivée. J'énonce l'une d'elles, presque immédiate, et cependant intéressante: s'il n'existe qu'une valeur de K pour laquelle $f(x) + Kx$ ne soit pas une fonction de Dirichlet autour de x_0 , $f(x)$ a une dérivée pour $x = x_0$.

L'intégration des fonctions sommables conduit à des résultats d'une autre nature dont voici le principal: si $f(x)$ est à nombres dérivés bornés, c.à.d. si $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$|f(x+h) - f(x)| < kh, \quad (k = \text{constante}),$$

bien connue dans la théorie des équations différentielles sous le nom de condition de Lipschitz, $f(x)$ a une dérivée, sauf tout au plus pour des valeurs de x formant un ensemble de mesure nulle. La fonction $f(x)$ est d'ailleurs déterminée à une constante additive près, quand on connaît sa dérivée là où elle existe.

Voici une conséquence de la propriété indiquée: si l'on exprime en fonction de l'arc s les coordonnées des points d'une courbe rectifiable, on a l'égalité

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

sauf tout au plus pour des valeurs de s formant un ensemble de mesure nulle. De là résulte aussi qu'une courbe rectifiable a presque partout des tangentes et que sa longueur peut être exprimée par l'intégrale classique dans un cas très étendu auquel on peut toujours ramener le cas général.

Après un long détour nous voici revenus aux procédés élémentaires de raisonnement et de calcul dont la portée se trouve ainsi considérablement augmentée, et en même temps nous avons eu l'occasion de distinguer des classes particulières de fonctions à propriétés assez simples pour qu'on puisse raisonner facilement sur elles.

CHAPITRE XIII

Je passe à des questions un peu différentes et dont l'origine se trouve, comme je l'ai dit, dans les travaux de Fourier. Puisqu'une série convergente de fonctions continues ne représente pas toujours une série continue, puisqu'elle n'est pas toujours dérivable terme à terme¹⁾, ni toujours intégrable, il y a lieu de rechercher dans quels cas on peut raisonner sur elle comme si elle ne contenait qu'un nombre fini de termes.

A cette question on répondit tout d'abord par la distinction entre la convergence uniforme et la convergence non uniforme; cette distinction, aperçue par Abel et Cauchy puis par Stokes, Seidel, et bien d'autres est maintenant trop classique pour que j'insiste sur son importance.

M. Dini a introduit une définition plus large: celle des séries à convergence uniforme simple; ces séries, quand leurs termes sont continus, ont des sommes continues mais il n'est pas toujours possible de les intégrer terme à terme. M. Dini a démontré aussi qu'une série convergente de fonctions dérivables pouvait être dérivée terme à terme pourvu que la série des dérivées soit à convergence uniforme simple et cela, que ces dérivées soient intégrables au sens de Riemann, ou non. Cette propriété et deux ou trois autres moins importantes constituent tout ce que l'on sait sur la dérivation des séries.

Au contraire on a des résultats très généraux sur la continuité des séries et leur intégration. M. Arzela a fait voir qu'une série convergente de fonctions continues a pour somme une fonction continue si, quels que soient e et n positifs, on peut trouver N de manière que pour chaque valeur de X l'un au moins des restes d'indices compris entre n et N est en valeur absolue inférieur à E . Cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

A la vérité, cela peut se démontrer si simplement qu'on peut être tenté de considérer cette propriété comme une tautologie sans intérêt. Mais il ne faut rien dédaigner, même pas les tautologies; une vérité peut être suggestive ou non, suivant la manière dont on l'exprime. Si la condition de M. Arzela n'est qu'une transformation simple de la définition même de la continuité d'une série, ce paraît être du moins une transformation heureuse.

M. Arzela a fait connaître aussi la condition nécessaire et suffisante

¹⁾ Cet argument est probablement un lapsus, car on peut construire des séries de Fourier dont la somme soit continue, sans que la somme de la série dérivée soit partout convergente (au sens classique).

pour qu'une série de fonctions intégrables au sens de Riemann ait une somme intégrable; cela ne veut d'ailleurs pas dire que ces séries soient intégrables terme à terme.

Sur l'intégration terme à terme, M. Osgood et ses élèves ont publié d'intéressants mémoires. Une série peut être convergente de bien des manières; si l'on ne sait pas encore caractériser nettement le degré de convergence et la nature de la convergence d'une série, les questions sont nombreuses où il apparaît qu'une classification des types de convergence est nécessaire. Le point de départ de M. Osgood est une distinction, déjà faite par Seidel, entre deux espèces de points de convergence. Une série étant supposée convergente partout il y a des points autour desquels la convergence est uniforme¹⁾, d'autres autour desquels cela n'a pas lieu. M. Osgood distingue deux espèces de ces points de non-uniforme convergence; autour des premiers les restes de la série sont bornés, autour des seconds, que l'on appelle les points X , cela n'est pas. On devine bien que les points X vont être les plus gênants et en effet, M. Osgood a fait voir que ces points s'opposaient seuls à l'intégration terme à terme; d'une façon précise il a prouvé que si une série de fonctions continues a une forme continue dans un intervalle libre de points X on peut l'intégrer dans cet intervalle.

Les élèves de M. Osgood publient de nombreuses généralisations en divers sens de cet important résultat. La théorie des fonctions sommables fournit à la fois une démonstration très simple et une généralisation étendue du théorème de M. Osgood: une série convergente de fonctions sommables, pourvu que la somme soit bornée, représente une fonction sommable et si l'ensemble des restes de la série est borné, cette série est intégrable terme à terme.

CHAPITRE XIV

C'est à l'occasion de séries trigonométriques que furent posés les plus importants des problèmes de la théorie générale des fonctions; pour cette raison ces séries, si importantes d'ailleurs dans plusieurs parties des mathématiques, ont dans cette théorie une place à part que n'ont pas les autres développements spéciaux.

¹⁾ D'après R. Baire, si une suite de fonctions continues est convergente, elle converge uniformément en tout point d'un ensemble partout dense, qui est d'ailleurs un résiduel au sens de M. Denjoy.

En 1748, dans un mémoire sur le mouvement de Saturne et de Jupiter qui obtint le prix de l'Institut, Euler remarqua que pour calculer l'intégrale d'une série procédant suivant les puissances de cas x , il y avait vraisemblablement avantage à la transformer d'abord en série procédant suivant les cosinus des multiples entiers de x parce que l'intégration, transformant $\cos n x$ en $\frac{\sin n x}{n}$, la présence du dénominateur n devait augmenter la convergence.

C'est ainsi qu'Euler fut conduit avant la discussion sur les cordes vibrantes, à s'occuper du calcul des coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction donnée. Dès 1748, Euler résolut le problème de diverses manières; comme il s'agissait de calculs effectifs, Euler préféra à la formule de détermination aujourd'hui classique qu'il connaissait peut-être déjà, quoi qu'il ne l'ait indiquée que dans un mémoire de 1777¹⁾, des formules qui sont en somme ce que deviennent les formules classiques quand on y remplace les valeurs exactes des intégrales qui y figurent par des valeurs approchées.

En 1754, D'Alembert fit connaître pour la détermination du premier coefficient la formule classique qu'il démontre par la méthode classique dans laquelle il ne voit d'ailleurs qu'une curiosité (*Recherches sur différents points du système du Monde*, tome II, p. 66).

En 1757 Clairaut démontra la formule classique pour le cas général; il déclare d'ailleurs, avec une modestie peut-être excessive, que tout ce qu'il démontre a déjà été obtenu par Euler et D'Alembert. Après avoir retrouvé la formule d'Euler, que quelques lignes plus loin il déclarera avec raison identique à celle de D'Alembert, il ajoute:

« Un avantage de la formule précédente c'est *l'universalité* de la construction qu'elle donne; elle est telle, qu'on peut l'appliquer à des fonctions de t beaucoup plus compliquées que celles que l'on a traitées jusqu'à présent. Dans les cas où la loi de la fonction ne sera pas même donnée algébriquement dans ceux où la courbe qui l'exprime ne serait donnée que par plusieurs points, notre manière de résoudre la série s'appliquerait avec autant de facilité.²⁾ »

¹⁾ Voir deux mémoires parus en 1798, dans le tome XI des *Nova acta acad. scient. Petrop.*; Euler y reprend et y développe pour le cas général les méthodes qu'il avait appliquées en 1748 à la détermination des deux premiers coefficients seuls utiles pour lui, du développement en séries de fonctions particulières.

²⁾ Par « loi algébrique » Clairaut entend évidemment ici ce que l'on appelle plus communément « loi analytique ». Le mémoire de Clairaut se trouve dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences*, année 1754, parue seulement en 1759.

Clairaut exprime très clairement ce qu'il faut entendre par ces intégrales qui figurent de la formule classique et qui ne portent peut-être pas sur des fonctions à loi algébrique; une telle intégrale exprime une certaine aire qu'on peut calculer d'une manière approchée.

En 1807 Fourier retrouve la formule qui donne les coefficients puis, faisant le même paralogisme que Clairaut, il admet que le développement est possible dans tous les cas où cette formule concerne un sens et, comme Clairaut, il dit ce que signifient les intégrales de la formule. Fourier va d'ailleurs plus loin que Clairaut; il étend le développement à des fonctions discontinues et surtout il donne des exemples de développements¹⁾. La phrase citée plus haut semble montrer que si Clairaut, moins absorbé par ses recherches astronomiques, s'était mêlé à la discussion sur les cordes vibrantes, il aurait émis sur la possibilité de développer une fonction en série trigonométrique une opinion différente de celles de Euler et de D'Alembert et voisine de celle de Fourier (*Théorie de la chaleur*, art. 230). Il est vraisemblable qu'au cours d'une telle discussion Clairaut eût donné, ce qui lui aurait été facile, des exemples de *l'universalité* du développement trigonométrique. En tous cas, il est bien remarquable qu'Euler et D'Alembert n'aient pas commis la faute si heureuse de Clairaut et de Fourier et qu'ils n'aient pas cru pouvoir tirer argument au cours de la discussion sur les cordes vibrantes de la formule de détermination des coefficients qu'ils connaissaient.

1) Dans un essai historique sur les séries trigonométriques, d'ailleurs très intéressant, M. Arnold Sachse écrit: « Il n'est pas moins certain que Fourier a connu les résultats d'Euler, car il indique lui-même (*théorie de la chaleur*, art. 428) que l'on trouve chez presque tous les mathématiciens de cette époque, Daniel Bernouilli, Clairaut, Euler, Lagrange, des résultats et des développements analogues aux siens ». En réalité on lit à l'endroit cité: « On trouve dans les ouvrages de tous les géomètres des résultats et des procédés de calcul analogues à ceux que nous avons employés. Ce sont des cas particuliers d'une méthode générale qui n'était point encore formée, ... » et plus loin, parlant de la notion des *fonctions séparées* ou *parties de fonctions*: « cette notion n'est point opposée aux principes généraux du calcul; on pourrait même en trouver les premiers fondements dans les écrits de Daniel Bernouilli, de Clairaut, de Lagrange et d'Euler ». Il y a loin de la phrase de Fourier à la conclusion de M. Sachse. D'ailleurs, tout s'enchaîne si bien dans les déductions de Fourier que l'hypothèse de M. Sachse me paraît à rejeter; même la méthode classique de détermination des coefficients, que seul Fourier pourrait avoir copiée, se présente naturellement (voir par exemple *Théorie de la chaleur*, art. 278). Il est à noter que Fourier ne considère pas cette méthode comme suffisante, car, dit-il, on pourrait tout aussi bien l'employer en ne conservant que quelques termes dans la série trigonométrique. Ce qui montre bien que les résultats antérieurs, publiés dans des travaux astronomiques, étaient oubliés à l'époque de Fourier, c'est que Poisson, qui chercha à enlever à Fourier l'honneur de sa découverte, ne trouva à citer qu'une formule d'interpolation trigonométrique donnée par Lagrange en 1766, très voisine à la vérité de la formule de Fourier, mais qui ne constituait pas cependant un précédent caractérisé comme ceux d'Euler de D'Alembert et de Clairaut.

CHAPITRE XV

Fourier dit à divers endroits qu'une démonstration de la convergence des séries trigonométriques qu'il obtient est nécessaire, mais il croit à tort que cette démonstration est immédiate. Cauchy a démontré le premier la convergence des séries de Fourier; ses raisonnements sont fort critiquables, comme l'a fait voir Dirichlet. Cependant M. Picard a montré que les considérations de Cauchy pourraient conduire à une démonstration rigoureuse valable, comme celle de Dirichlet, pour les fonctions continues n'ayant pas un nombre infini de maxima et aussi pour les fonctions discontinues que Dirichlet a considérées.

La première démonstration rigoureuse de la convergence est celle de Dirichlet; elle fut publiée presque en même temps qu'un mémoire de Dirksen qui, bien qu'inférieur à tous points de vue à celui de Dirichlet, constitue cependant une bonne contribution à l'étude des Séries de Fourier.

Depuis Dirichlet, bien des travaux ont été consacrés au même sujet. Lipschitz a donné une condition de convergence qui généralise la « condition de Lipschitz » dont j'ai déjà parlé. M. Jordan a démontré la convergence pour les fonctions à variation bornée. P. du Bois Reymond et M. Dini ont fait connaître d'autres conditions de convergence.

Toutes ces conditions peuvent se réunir en une seule qu'on peut énoncer ainsi dans le cas des fonctions continues: la série de Fourier de $f(x)$ est convergente pour $x = x_0$ si l'intégrale

$$\int_d^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x_0 + t + d) + f(x_0 - t - d) - f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{t} \right| dt$$

tend vers zéro avec d . Malgré la complication apparente de cette condition, sa démonstration est immédiate et l'on peut facilement en déduire les conditions particulières simples ci-dessus énoncées.

Il y a intérêt à réunir en une seule des conditions obtenues par des procédés différents parce qu'on peut espérer que les démonstrations ou les résultats suggéreront à quelqu'un sinon une condition nécessaire et suffisante de convergence, du moins des conditions de divergence. Or de telles conditions seraient très intéressantes à connaître, car du Bois Reymond a montré que certaines fonctions continues avaient des séries de Fourier divergentes.

Le mémoire tout à fait remarquable de P. du Bois Reymond introduit dans l'étude des séries trigonométriques un élément entièrement nouveau.

On sait qu'une fonction peut augmenter indéfiniment de bien des manières, la classification des types d'infinitude est un des problèmes qui ont préoccupé du Bois Reymond. Ce problème est très difficile, il semble que le transfini interviendra nécessairement dans cette classification, comme l'a fait remarquer M. Borel qui a poursuivi les recherches de du Bois Reymond en vue d'applications aux séries divergentes et aux séries entières.

La notion de type d'infinitude trouve aussi son application dans le mémoire de du Bois Reymond: pour les fonctions qu'il étudie les conditions de convergence et de divergence obtenues s'expriment par la comparaison de types d'infinitude. Ces conditions de divergence peuvent se caractériser en disant qu'un minimum d'irrégularité dans l'allure de la fonction au point considéré paraît nécessaire à la divergence. Si cette apparence n'est pas trompeuse, il faut s'attendre à ce que quelque chose d'analogue aux types de croissance s'introduise nécessairement dans toute condition très large de convergence.

Les conditions de convergence actuellement connues, sont déjà assez étendues pour que l'on puisse citer des fonctions sommables, mais non intégrables au sens de Riemann, qui sont représentées par leur série de Fourier partout convergente.

Avant de quitter ces recherches sur la convergence, je veux citer une méthode tout élémentaire que M. Kneser vient d'employer très heureusement. Démontrons, ce qui est facile, que deux fonctions continues différentes ne peuvent avoir la même série de Fourier; alors on pourra affirmer qu'une fonction continue est représentée par sa série de Fourier dans tous les cas où l'on démontrera que cette série est convergente, intégrable terme à terme et qu'elle représente une fonction continue. Cela permet d'obtenir très élémentairement des conditions de convergence pratiquement suffisantes en général.

CHAPITRE XVI

Dans ses recherches sur les cordes vibrantes, Lagrange utilise la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$$

à laquelle il assigne la somme $-1/2$ ¹⁾.

¹⁾ Lagrange transforme cette série en une somme de deux progressions géométriques d'exponentielles imaginaires et il applique à ces progressions divergentes la formule de sommation des progressions convergentes.

Faisons dans cette série $x = \pi$ on a la série

$$-1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

à laquelle Leibnitz avait attaché la somme $-\frac{1}{2}$ parce que $-\frac{1}{2}$ est la moyenne des sommes successives -1 et 0 . Faisons encore $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$, on a des séries auxquelles, pour des raisons analogues, on attribuait la somme $-\frac{1}{2}$. Dans le tome IV de ses Opuscules, D'Alembert, tout en s'élevant contre cet emploi du mot somme, démontre que la moyenne arithmétique des sommes successives de la série tend vers $-\frac{1}{2}$, pour $0 < x < 2\pi$.

C'est de ces remarques que date la méthode de sommation des séries divergentes au moyen de la moyenne arithmétique. Mais cette méthode, malgré un important résultat de Frobenius, malgré les recherches de M. Cesaro, était restée une simple curiosité jusqu'aux travaux de M. Borel sur les séries divergentes sommables. Ces travaux peuvent être regardés comme une extension considérable de la méthode de sommation arithmétique; l'importance de leurs résultats apparaît surtout dans l'étude des séries entières auxquelles se rapportent bien des recherches récentes, en particulier celles de M. Mittag-Leffler.

Les résultats de M.M. Borel et Mittag-Leffler ont donné à M. Fejér l'idée d'essayer de sommer les séries de Fourier divergentes. Son résultat essentiel est le suivant: une Série de Fourier est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique et représente la fonction correspondante en tous les points où cette fonction est continue.

Je n'insiste pas sur les conséquences de cette importante proposition ni sur les autres résultats de M. Fejér; j'ai tenu à dire à la suite de quel détour le procédé de sommation par la moyenne arithmétique, imaginé à l'occasion d'une série trigonométrique, avait été appliqué aux séries de Fourier.

Sans sortir de la famille des séries trigonométriques convergentes, on peut se demander s'il n'en existe pas d'autres que les séries de Fourier. Cette existence est certaine quand on renonce en général à la convergence, mais supposons que les points de divergence forment au plus un ensemble réductible. Des recherches de Heine et de M. Cantor il résulte que dans ces conditions il ne peut y avoir plus d'une série représentant la fonction donnée. Les résultats obtenus par Riemann dans son célèbre mémoire déjà cité, jouent le rôle fondamental dans ces recherches; ils consistent surtout dans l'énoncé des rapports entre la fonction représentée $f(x)$ et la fonction $F(x)$ que représente la fonction intégrée deux fois. $f(x)$ dépend de

$F(x)$ à la manière dont une dérivée seconde dépend de sa fonction primitive. Le théorème de Heine — Cantor est l'analogue du théorème fondamental: deux fonctions ayant la même dérivée ne diffèrent que par une constante; ici on a cet énoncé: $F(x)$ est déterminé par $f(x)$ à un polynôme additif du premier degré près.

Reste à trouver ces fonctions $F(x)$; lorsque $f(x)$ est bornée et intégrable au sens de Riemann, il résulte de travaux de Dini, Ascoli, P. du Bois Reymond que $F(x)$ s'obtient en intégrant deux fois de suite $f(x)$ et cela veut dire que la seule série trigonométrique qui puisse représenter $f(x)$ est la série de Fourier de $f(x)$. Ce résultat s'étend à toute fonction bornée grâce à l'intégration des fonctions sommables, mais le cas de fonctions non bornées appelle encore bien des recherches.

On voit l'analogie grande qu'il y a entre le problème des séries trigonométriques et le problème inverse de la dérivation; il est probable que tout progrès de l'un de ces problèmes sera accompagné d'un progrès de l'autre. Il en a du moins toujours été ainsi jusqu'à présent et c'est l'une des principales raisons qui donnent aux séries trigonométriques une place à part dans la théorie des fonctions.¹⁾

J'ai déjà dit que le mémoire de Riemann est la base des recherches générales; il est remarquable que ce mémoire contiennent plusieurs démonstrations de faits peu intéressants par eux-mêmes, en apparence du moins, et qui se sont trouvés des plus importants dans les recherches ultérieures. Si l'on remarque aussi que Riemann n'a jamais destiné son mémoire à l'impression, — ce mémoire n'a été publié qu'après la mort de l'auteur — on sera peut-être conduit à penser que Riemann s'était posé plusieurs des problèmes qu'on a résolu depuis et qu'il avait eu l'intention de poursuivre ses recherches. Il est vrai qu'aucune note concernant ce sujet n'a été publiée par ceux qui ont recueilli les papiers de Riemann; mais, si ses intentions primitives sont celles que j'imagine, on ne peut s'étonner que,

¹⁾ Lebesgue avait remarquablement bien vu le rapport entre le problème des séries trigonométriques et le problème inverse de la dérivation.

C'est en effet en mettant en œuvre les idées qui lui avaient déjà permis en 1915 de résoudre le second problème, que M. Arnaud Denjoy put en 1920-1921, calculer les coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque, dès que la somme est connue.

Ces travaux sont développés dans son ouvrage en plusieurs volumes publié chez Gauthier-Villars. On y trouvera en outre une étude détaillée des ensembles parfaits linéaires, et un exposé des théorèmes topologiques qui sont à la base de ces résultats.

pendant les douze années si bien remplies qu'il lui restait à vivre, Riemann n'ait pas trouvé le temps de les mettre à exécution.

Des recherches sur les séries trigonométriques, j'extraie encore un théorème de M. de la Vallée Poussin d'après lequel toute série de Fourier, même divergente, est intégrable terme à terme; c'est, si l'on veut, la confirmation de cette induction vague qui conduisit Euler à considérer les séries trigonométriques dans son mémoire de 1748.¹⁾

CHAPITRE XVII

Jusqu'à ces dernières années on n'avait pas entrepris de recherches directes sur la puissance de représentation des expressions analytiques, mais bien des travaux avaient fourni des renseignements sur ce sujet, les travaux de Fourier et de Dirichlet par exemple.

J'insiste sur le résultat précis de Dirichlet: une fonction continue qui n'a qu'un nombre fini de maximum est représentable par sa série de Fourier.

Ainsi, alors que D'Alembert croyait pouvoir énoncer des propriétés très particulières appartenant aux fonctions représentables trigonométriquement, alors qu'on aurait pu craindre ne pouvoir exprimer que par des relations analytiques compliquées des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit exprimable analytiquement, il suffit que des conditions très simples, relatives à sa variation, soient remplies pour que la fonction soit représentable analytiquement par une série trigonométrique.

Weierstrass a fait connaître un théorème très important pour notre sujet: toute fonction continue est représentable par une série uniformément convergente de polynomes. Ce théorème, dont on possède de très nombreuses démonstrations, fait rentrer toutes les fonctions continues dans la classe des fonctions représentables analytiquement. *Les géomètres du*

¹⁾ On ne saurait omettre de rappeler que la théorie des Distributions de L. Schwartz permet de donner un sens à la somme de toute série trigonométrique dont les coefficients a_n et b_n croissent moins vite qu'une puissance de n .

La somme est une « distribution » périodique, inversément toute distribution périodique est la somme d'une telle série.

On peut donc dire que toute série dont les coefficients ne croissent pas trop vite est la série de Fourier d'une fonction ou d'une distribution.

En particulier, toute série trigonométrique qui converge partout a aussi pour somme une distribution. On peut donc lui attacher deux êtres: D'une part une fonction, d'autre part une distribution; certes chacun de ces êtres détermine l'autre; mais le passage de l'un à l'autre n'est pas simple.

18^e siècle, qui ne considéraient que des fonctions continues, avaient introduit à tort une distinction entre les courbes et fonctions géométriques et les courbes et fonctions arbitraires ; cette seconde classe n'existe pas.

Il est vrai que ces géomètres ne considéraient pas tous les développements analytiques et qu'ils se bornaient presque toujours aux séries entières, aussi je devrais parler ici des recherches sur la possibilité de représenter une fonction par sa série de Taylor. Je me contenterai de dire que les formules qui donnent le reste de la suite de Taylor et les résultats qu'obtint Cauchy par l'emploi des nombres complexes ne résolvent pas complètement la question.

M. Baire a abordé l'étude des fonctions qu'on peut exprimer analytiquement; du mémoire de M. Baire — qui contient aussi une très heureuse généralisation de la notion de continuité, une contribution importante à l'étude de la continuité dans le cas de plusieurs variables et des recherches sur les principes de l'intégration des équations aux dérivées partielles — je ne retiens que la partie relative à mon sujet. Je n'en respecte d'ailleurs pas l'ordre afin d'arriver de suite à une classification très importante des fonctions.

Mettons les fonctions continues dans la classe 0; la classe 1 sera formée des fonctions discontinues représentables par des séries de fonctions continues. Plus généralement la classe n comprendra les fonctions, s'il en existe, qui ne sont pas des classes 0, 1, 2, ... $n - 1$, mais qu'on peut représenter par une série de fonctions de ces classes. Quand nous aurons épuisé les nombres entiers, rien ne nous empêchera de rêver qu'il existe peut-être des fonctions n'appartenant à aucune de nos classes et représentables par des séries de fonctions de ces classes; il sera indiqué de réunir ces fonctions en une classe nouvelle que l'on notera tout naturellement avec le symbole ω , premier des nombres transfinis de M. Cantor. On peut ainsi imaginer tout une suite transfinie de classes ayant pour indices les nombres entiers et les nombres transfinis de M. Cantor¹⁾.

Cette classification étonnera peut-être le lecteur, elle est cependant très rationnelle; je vais essayer de le faire voir.

Toutes les fonctions considérées sont représentables analytiquement puisqu'elles sont construites à l'aide de séries à partir de fonctions continues, c'est-à-dire à partir de polynomes. Mais il n'est pas inutile de préciser ce que l'on entendra par *expression analytique*; c'est toute expression de calcul

¹⁾ Ici et dans la suite, les nombres transfinis dont il s'agit sont toujours ceux de la première classe de nombres transfinis, c'est-à-dire de la seconde classe numérique d'après les dénominations de M. Cantor.

formée, à partir de constantes et de variables, à l'aide d'un nombre fini ou tout au plus d'une infinité dénombrable d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et de passages à la limite.

Cette définition ne serait pas élargie si l'on ajoutait aux opérations indiquées l'extraction d'une racine, l'élévation à une puissance incommensurable, l'intégration, la dérivation, etc.; d'ailleurs la définition que j'adopte est déjà très large, elle le serait trop dans beaucoup de recherches.

Toutes les fonctions de M. Baire sont exprimables analytiquement et la réciproque est vraie, cela est presque évident. M. Baire classe donc toutes les fonctions exprimables analytiquement, et ce qui justifie la division en classe adoptée, c'est non seulement qu'elle sépare les fonctions qu'on ne peut pas représenter de la même manière, mais aussi et surtout qu'on ne sort pas d'une classe quand on effectue sur les fonctions de cette classe des additions, soustractions, multiplications, divisions, etc. Le passage à la limite et l'opération qui consiste à considérer une fonction de fonction sont les moyens les plus simples de sortir d'une classe.

Toute expression analytique pouvant être remplacée par une autre construite par des passages successifs à la limite, à partir de polynomes, une propriété appartiendra à toutes les fonctions représentables analytiquement si elle appartient aux polynomes et si elle se conserve à la limite. M. Baire a fait connaître de telles propriétés. De plus, pour rechercher quelles sont les fonctions exprimables analytiquement, au lieu d'avoir à considérer toutes les expressions analytiques possibles dont les formes sont si différentes, nous n'aurons plus qu'à considérer des expressions, à la vérité de plus en plus compliquées, mais construites toujours de la même manière.

M. Baire a fait une étude complète de la plus simple de ces formes d'expressions analytiques; son résultat essentiel est le suivant: une fonction appartient aux classes 0 ou 1, quand elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait et réciproquement.

Les recherches relatives aux fonctions sommables conduisent naturellement à donner une autre réponse à la question que se posait M. Baire. Dans ces recherches on considère des ensembles associés à chaque fonction et qui sont les ensembles de valeurs de la variable pour lesquelles la fonction est comprise entre deux nombres déterminés pris arbitrairement. On arrive facilement à voir quels doivent être ces ensembles associés pour que la fonction soit de la classe 0 ou de la classe 1; une généralisation de ces résultats permet de caractériser les fonctions d'une classe déterminée quelconque et aussi les fonctions exprimables analytiquement.

Comme conséquence de ces résultats on peut donner des exemples de fonctions appartenant à l'une quelconque des classes qu'a imaginées M. Baire; on peut aussi construire des fonctions qui échappent à la classification considérée. *Dans le cas des fonctions discontinues, l'ancienne distinction entre les fonctions géométriques et les fonctions arbitraires est fondée parce qu'on peut nommer des fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.*

CHAPITRE XVIII

Le travail de M. Baire a suscité d'autres recherches, on s'est demandé, par exemple, quels renseignements les méthodes de cet auteur donneraient concernant les séries de polynomes complexes; je laisse ces recherches de côté pour faire quelques remarques au sujet des résultats indiqués.

La classification de M. Baire, dont toutes les classes existent effectivement, fait intervenir le transfini. Il semble bien que la notion des nombres transfinis ne pourra plus être plus longtemps bannie des mathématiques¹⁾, j'ai déjà eu l'occasion de dire qu'on la rencontrait dans l'étude des modes de croissance, on la rencontre aussi dans l'étude des ensembles réductibles, utiles comme je l'ai dit dans l'intégration et dans la théorie des séries trigonométriques et dont l'intérêt pour la théorie des fonctions de variable complexe a été mis tout d'abord en évidence par M. Mittag-Leffler.

En somme cette notion nouvelle n'a rien d'obscur et je crois que son introduction en mathématiques n'aurait soulevé aucune objection si, comme ça été le cas pour bien d'autres notions, les applications avaient précédé et préparé la théorie abstraite et si surtout on n'avait pas imaginé la dénomination malheureuse de nombre transfini.

S'il me plaisait de ranger dans une même classe, que je noterais $\alpha \omega + n$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, 9$; $n = 0, 1, 2, \dots$; ω est un symbole associatif

¹⁾ Prévision que l'avenir a justifiée, puisqu'une grande partie des travaux de M. Denjoy est basée sur l'utilisation des nombres transfinis.

Toutefois, bien que les nombres transfinis restent un moyen puissant de découverte, les exposés synthétiques modernes ne les utilisent guère; par exemple l'axiome du choix sous la forme: Tout ensemble peut être « bien ordonné » est presque toujours remplacé par l'axiome de Zorn qui en est une forme équivalente plus commode.

Par ailleurs, une étude de Kuratowski, Fund. Math., 1922, T. 3, pp. 76-108 a montré que dans de nombreux cas, on pouvait les éliminer des raisonnements mathématiques.

Mais il reste des exposés d'où on ne saurait les éliminer; ce sont les constructions comme la totalisation, dont les étapes successives, en nombre infini sont numérotées par des ordinaux.

G. C.

les nombres qu'on peut écrire dans le système décimal en n'employant, que n fois le chiffre α , mais qu'on ne peut écrire sans employer une infinité de fois les chiffres $0, 1, \dots, \alpha - 1$ et enfin dans la classe 10ω tous les autres nombres, on pourrait m'objecter que ma classification est bizarre et inutile, mais personne n'élèverait d'objections de principe; cependant j'employerai des nombres transfinis. C'est qu'il n'y a aucune difficulté à parler de tous les nombres transfinis inférieurs à un nombre transfini donné; ou peut-être les difficultés commencent, c'est quand on parle de l'ensemble de tous les nombres transfinis.

Les applications des nombres transfinis, que j'ai indiquées, conduisent à des énoncés où le transfini intervient, explicitement ou non; les raisonnements où le transfini intervient sans subsister dans le résultat sont plus intéressants encore. Le premier exemple d'un tel raisonnement est dû à MM. Cantor et Bendixson qui démontrent, par l'emploi de transfini, que tout ensemble fermé F est formé par la réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait P ¹⁾.

Un second exemple est le raisonnement qui conduit M. Baire à la condition ci-dessus énoncée pour qu'une fonction soit de classe 1.

Ces raisonnements peuvent être remplacés par d'autres où le transfini n'intervient pas; mais il est remarquable que, tandis que le raisonnement de MM. Cantor et Bendixson fournit une relation entre l'ensemble P et les dérivés de F , tandis que le raisonnement de M. Baire fournit un procédé régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe 1, les raisonnements sans transfini qu'on leur a substitués ne nous fournissent pas ces renseignements, et ils ne peuvent pas nous les fournir parce que le transfini intervient dans l'énoncé des résultats complémentaires de MM. Cantor et Bendixson et de M. Baire. Les résultats que j'ai appelés complémentaires sont très importants de sorte que, dans certains cas du moins, les simplifications que l'on obtient en se passant du transfini sont plus apparentes que réelles; on a un raisonnement plus simple parce qu'on démontre moins.

Par exemple, M. Lindelöf a donné une très élégante et très simple démonstration du théorème de MM. Cantor et Bendixson; partant des mêmes principes que M. Lindelöf je n'ai pu donner de ce théorème qu'une démonstration en somme compliquée parce que je voulais obtenir aussi

¹⁾ Un ensemble fermé est un ensemble contenant ses points limites; un ensemble parfait est un ensemble fermé dont tous les points sont points limites.

les résultats complémentaires de MM. Cantor et Bendixson, indispensables pour mon objet.

Un raisonnement où le transfini intervient présente en général tous les avantages d'un raisonnement par récurrence. Quand on emploie le raisonnement par récurrence, c'est qu'on a établi une classification, dans laquelle les classes sont numérotées à l'aide de nombres entiers, qui divise la difficulté à vaincre. Quand on emploie le transfini dans un raisonnement c'est qu'on a établi une classification, dont les classes sont numérotées à l'aide de nombres entiers et transfinis, qui divise aussi la difficulté à vaincre. Et pour la vaincre on utilise toujours un raisonnement que j'appellerai le raisonnement par récurrence généralisé et qui repose sur ce jugement: une propriété vraie pour le nombre 1 appartient à tous les nombres entiers et transfinis si elle est vraie pour un de ces nombres dès qu'elle est vraie pour tous les nombres inférieurs.

Ce raisonnement diffère, au moins par la forme, du raisonnement par récurrence ordinaire comme on s'en rend compte en remarquant que $\alpha - 1$ n'a pas toujours de sens. N'y a-t-il là qu'une différence de forme, ou a-t-on affaire à un nouveau mode de raisonnement ? C'est là un point qui mérite l'attention de tous ceux qui s'intéressent aux principes des mathématiques.

Dans une des expositions adoptées par M. Cantor il semble bien que le raisonnement par récurrence généralisé n'introduit rien de nouveau parce que M. Cantor définit les nombres transfinis en énonçant certaines de leurs propriétés parmi lesquelles la suivante: tout ensemble de nombres transfinis différents contient un nombre inférieur à tous les autres, et parce que le raisonnement par récurrence généralisé peut se légitimer à partir de cette propriété comme le raisonnement par récurrence ordinaire se légitime si l'on admet que « dans toute collection d'entiers différents il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres » (Poincaré, Science et Hypothèse, p. 22). Mais si l'on veut démontrer que les propriétés prises comme définition des nombres transfinis sont compatibles, en prouvant que ces propriétés appartiennent à tels ou tels êtres analytiques, aux classes de M. Baire par exemple, ou encore si l'on veut faire une application des résultats de la théorie abstraite aux classes de M. Baire, il faudra démontrer, sans l'emploi de raisonnement par récurrence généralisé, que les propriétés de définition appartiennent bien à ces classes. Il est bien probable que là se retrouverait la difficulté qu'on semblait avoir écartée.

D'ailleurs, à examiner les choses un peu trop superficiellement peut-être pour qu'il soit possible de conclure, il semble bien qu'il y ait une différence

essentielle entre les deux modes de raisonnement. Le raisonnement par récurrence ordinaire fournit un procédé régulier permettant de vérifier la propriété, pour un entier déterminé quelconque, au moyen d'un nombre fini de syllogismes. Le procédé par récurrence généralisé ne permet de vérification pour un nombre transfini que si l'on emploie le raisonnement par récurrence ordinaire. On peut exprimer cela en disant: le raisonnement par récurrence ordinaire permet de conclure pour une collection contenant une infinité dénombrable, le raisonnement par récurrence généralisé permet de conclure pour une collection contenant une infinité non dénombrable d'objets.

CHAPITRE XIX

Les résultats dont j'ai indiqué l'existence, ainsi que presque tous ceux relatifs aux fonctions générales, appellent une autre remarque. Nous énonçons comme condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée que la fonction jouisse de telle ou telle propriété; mais nous ne savons pas reconnaître en général si une fonction donnée possède ou non cette propriété et, s'il arrive que nous connaissions un procédé régulier permettant de faire cette recherche, ce procédé utilise des opérations que nous ne savons pas toujours effectuer. Ces conditions ne sont-elles que des tautologies sans intérêt? Puisqu'on a pu en déduire quelque chose elles n'ont pas été inutiles bien qu'elles énoncent seulement l'équivalence de deux problèmes. Mais il y a plus, on peut affirmer que toute autre condition aurait les mêmes inconvénients; il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'il n'est pas d'opération, si simple soit-elle, qu'on sache effectuer sur toute fonction donnée, par quelque procédé que ce soit: on ne sait pas reconnaître si une fonction est continue ou non, on ne sait pas calculer son maximum et son minimum dans un intervalle, etc., et si l'on admet généralement que l'on sait effectuer ces opérations c'est parce que cela est vrai le plus souvent dans la pratique. Il ne faut pas trop demander à une condition nécessaire et suffisante. La condition ci-dessus énoncée qu'a fait connaître M. Baire est souvent applicable pratiquement; les conditions actuellement connues, pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée d'indice supérieure à 1, sont mauvaises.

Pour que les problèmes aient des solutions précises, il faudrait s'astreindre à ne considérer que des fonctions définies par des procédés très spéciaux; nous avons vu, par exemple, que le théorème de M. Arzela, qui fait connaître à quelle condition une fonction définie par une série de fonctions continues

est de classe 1, ne donne encore pour ce cas simple qu'une condition souvent inapplicable pratiquement. Pour résoudre pratiquement un problème relatif aux fonctions il faudrait examiner successivement les différents procédés employés actuellement pour donner une fonction. Une énumération complète de ces procédés paraît difficile; je me contenterai d'examiner ce que l'on entend par *une fonction donnée*.

CHAPITRE XX

La définition générale des fonctions est si vague que non seulement elle ne suffirait pas à donner l'idée de fonctions à qui ne l'aurait pas mais encore qu'elle ne fournit pas de réponse précise à cette question: comment peut-on nommer une fonction ?

On ne fait plus en général de différence entre une fonction déterminée et une fonction définie ou donnée; je me conformerai à cet usage. Parfois même on dit fonction connue à la place de fonction déterminée, mais on verra qu'il est possible qu'une fonction soit déterminée et qu'on ne connaisse presque rien sur elle.

Tant qu'une fonction était une expression de calcul, donner une fonction a été nommer ou écrire la représentation analytique de la fonction. Plus tard, donner une fonction ce fut indiquer un procédé quelconque permettant d'obtenir la valeur de la fonction pour chaque valeur donnée de la variable. Mais cela est peu clair; la valeur donnée de la variable peut être définie par son développement décimal, par son développement en fraction continue, et de bien d'autres façons encore. Lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est nulle pour toutes les valeurs rationnelles de la variable et égale à 1 pour les autres, on définit bien une fonction et cependant on ne connaît pas sa valeur, quand la valeur donnée de la variable est la constante d'Euler.

Cette difficulté résolue ou écartée pour la variable va se présenter à nouveau pour la fonction et il s'en présentera d'autres; supposons, pour ne pas donner un sens trop restreint à notre énoncé, qu'une fonction $\varphi(x)$ sera définie quand on saura la calculer, pour x donné, avec une approximation donnée quelconque. Alors une série convergente ne définira une fonction que si l'on sait apprécier la rapidité de sa convergence pour chaque valeur de la variable.

En présence de ces difficultés on peut prendre bien des attitudes. Par exemple, puisqu'il n'est pas d'opération qu'on puisse effectuer réellement sur les nombres irrationnels, on peut n'admettre pour la variable ou la

fonction que des valeurs rationnelles; mais cela ne résoud aucune difficulté. Par quelque nom qu'on désigne ce que l'on appelle communément les nombres irrationnels, ou qu'on se refuse à les nommer, cela n'empêchera pas ces nombres de s'introduire naturellement et nécessairement dans bien des questions d'analyse. Aussi renonce-t-on en général à limiter le champ de variation de la fonction et de la variable.

Pour les opérations, on peut n'admettre que celles qu'on peut véritablement effectuer ou au contraire, ce qui est l'attitude adoptée généralement, on peut admettre toute opération qu'on sache ou non l'effectuer.

Par exemple, je définis une fonction de la manière suivante: j'écris x sous forme décimale, je barre les chiffres décimaux de rang pair, si les chiffres restants forment le développement décimal d'un nombre algébrique, la fonction y sera égale à 1, sinon elle sera nulle. Dans cette définition interviennent des opérations que je ne peux pas effectuer: je ne peux pas écrire une infinité de chiffres; pour cela la forme de l'énoncé seule est fautive. Mais il intervient aussi des opérations que je ne sais pas effectuer: reconnaître si un développement décimal correspond ou non à un nombre algébrique. Le mot définir a acquis ici le sens de déterminer.

Déterminer un objet c'est faire en sorte que « deux personnes lorsqu'elles parlent de cet objet soient certaines qu'elles parlent du même »; c'est donc nommer une propriété caractéristique de cet objet.

Je ferai remarquer qu'on peut déterminer une fonction $y(x)$ sans nommer une propriété caractéristique de chacun des ensembles (y, x), mais en nommant une propriété caractéristique de la fonction; c'est par exemple ce que l'on fait constamment dans la théorie des équations différentielles quand on détermine une solution par des conditions initiales ou aux limites. Je pourrais déterminer une fonction en disant: c'est la première de celles indiquées dans l'ouvrage portant tel numéro dans le catalogue de la bibliothèque universitaire de Rennes. Que l'on écarte ou non ces déterminations, faisant intervenir l'expérience, il n'est pas inutile de remarquer combien l'on connaît peu de choses relativement à une fonction quand on n'en connaît que sa détermination.

Quel que vaste que soit l'ensemble des déterminations logiques, certains mathématiciens ont admis un mode de détermination plus étendu encore. Dans sa théorie générale des fonctions Paul du Bois Reymond, met aux prises deux contradicteurs: l'Idéaliste et l'Empiriste. Ces deux philosophes ne discutent pas sur la détermination des fonctions mais, au cours de leur discussion sur la notion de limite, ils prennent position dans la question de la détermination des fonctions, question intimement liée à celle qu'ils

étudient. L'Empiriste n'admet que les déterminations logiques, l'Idéaliste en admet d'autres.

Quand il s'agit d'une fonction déterminée logiquement mais dont nous ne savons pas calculer la valeur, nous nous croyons en droit de raisonner sur elle parce que seule la propriété caractéristique qui détermine la fonction intervient dans notre raisonnement. Il arrive d'ailleurs souvent que la propriété caractéristique n'intervient pas toute entière; quand on démontre, par la méthode de Cauchy, qu'une fonction continue est intégrable on raisonne sur une fonction de laquelle on sait seulement qu'elle est continue et déterminée, peu importe comment. Pour l'Empiriste un tel raisonnement n'est qu'une forme vide de sens mais qui acquiert un sens dès qu'on refait le raisonnement à l'occasion d'une fonction particulière déterminée. Alors, toutes les fois qu'on parle de la fonction déterminée, on pense à la propriété caractérisant la fonction. Bien entendu, par économie, on ne refait pas le raisonnement pour toutes les fonctions auxquelles on veut appliquer la propriété; il suffit de savoir qu'on pourrait le refaire.

Ce qui est une forme vide de sens pour l'Empiriste est le raisonnement définitif et complet pour l'Idéaliste parce que, pour lui une fonction est déterminée dès qu'il affirme qu'elle l'est. Quand un *I.* parle d'une fonction déterminée il ne pense pas à une propriété caractéristique il pense seulement aux mots à fonction déterminée. Quand un *I.* veut déterminer une fonction il n'en cherche pas une propriété caractéristique qui lui permettrait, à lui comme aux autres, d'être certain de penser toujours à la même fonction, il se contente de dire qu'il choisit cette fonction, qu'il la détermine; il affirme aux autres, ils s'affirme à lui-même que c'est toujours à la même fonction qu'il pense. Cette affirmation, que l'*I.* reconnaît et déclare incontrôlable, paraît dépourvue de sens à l'*E.* qui met en dehors des mathématiques, les déterminations particulières à l'*I.*

Il y a bien des manières d'être *I.* ou *E.* L'*I.* de du Bois Reymond dit à un moment que c'est « le désir ardent de dépasser les limites de ce qui est *aujourd'hui* représentable » qui engendre l'idéalisme. S'il s'agissait seulement de savoir s'il est opportun de commencer dès maintenant certaines recherches ou de les remettre à plus tard, la discussion perdrait beaucoup d'intérêt; mais il ne faut voir dans la phrase citée, qu'une concession faite à l'*E.* L'*I.* qui ne s'arrête pas à mi chemin veut qu'on lui reconnaisse le droit de raisonner sur ce qui ne sera jamais représentable. L'*I.* conséquent « pose comme fondement l'essence des choses supposées indépendantes de l'existence de cerveaux humains »; dès lors ce qui lui paraît important, dans le raisonnement par lequel Cauchy légitime l'intégration des fonction

continues, c'est que la fonction dont on s'occupe est différente des autres; peu importe que l'on sache ou non dire en quoi consiste cette différence, c'est-à-dire déterminer la fonction.

L'*E.* comme l'*I.* se reconnaît le droit de raisonner sur cette fonction dont j'ai parlé et qu'il ne connaît que par la place qu'elle occupe dans la bibliothèque de Rennes, bien qu'il ne sache pas la déterminer logiquement; mais l'*E.* sait bien que cette fonction étant écrite dans un livre est déterminable logiquement. L'*I.* raisonnerait encore volontiers sur la fonction en question si le livre qui la contient était l'œuvre de quelque divinité ayant eu l'éternité à sa disposition pour écrire sur les pages du livre, supposées en nombre infini, les valeurs $f(1), f(2), \dots$ de la fonction, que l'on ne considérera que pour les valeurs entières de la variable. Et cependant il serait alors douteux qu'on puisse déterminer logiquement cette fonction en prononçant un nombre fini de mots; il serait d'ailleurs impossible, puisqu'on ne peut lire une infinité de nombres, de reconnaître si la fonction est ou non déterminable à la manière de l'*E.*

Si le lecteur ne peut admettre que le nombre des pages d'un livre soit infini, il admettra peut-être plus volontiers que les étoiles sont en nombre infini. Il lui suffira alors de supposer que sur ces étoiles sont marquées les valeurs $f(1), f(2); \dots$ pour avoir l'exemple de fonction non déterminable logiquement que M. Jules Tannery a donné dans la *Revue des Sciences* (tome VIII, pages 128-140, 1897).

Quant à un exemple effectif il faut évidemment renoncer à en donner un; toute fonction que l'on peut nommer est déterminable logiquement.

CHAPITRE XXI

Si l'on ne peut nommer que les fonctions de l'*E*, pourquoi en considérer d'autres? Quel intérêt ces discussions peuvent-elles avoir pour le mathématicien qui ne rencontrera jamais que les fonctions de l'*E*.

Il est certain qu'un calcul effectif ne sera jamais effectué que sur une fonction de l'*E*, mais, à l'occasion de ces fonctions, on peut employer incidemment une détermination idéaliste. C'est ce qu'a fait récemment M. Zermelo dans un raisonnement qui a ravivé la querelle entre idéalistes et empiristes. Les lecteurs de la Revue ont été mis au courant de cela par deux notes parues le 30 mars 1905 et le 30 juin 1905.

Le raisonnement de M. Zermelo est trop compliqué pour que je le développe ici, mais je vais donner un exemple de ce que ce peut être qu'une

détermination idéaliste employée incidemment. Cela me permettra de faire comprendre la pensée idéaliste mieux sans doute que je n'ai dû le faire, car je ne la comprends pas entièrement. Je m'empresse d'ajouter, pour ceux que touche l'argument d'autorité, que le point de vue idéaliste est celui de plusieurs mathématiciens éminents.

Supposons que l'on ait démontré qu'il y a contradiction à admettre à la fois qu'une fonction est continue en tout point d'un intervalle fini et qu'elle n'est pas uniformément continue dans cet intervalle. Il ne serait pas difficile de compléter un tel raisonnement, quel qu'il soit, de manière qu'il permette de nommer un point de discontinuité d'une fonction quelconque non uniformément continue dans un intervalle fini; mais je suppose que ce complément nous échappe complètement et que nous nous en tenions au résultat énoncé tout d'abord.

L'*E.* et l'*I.* énonceront volontiers ce résultat en disant: « une fonction qui n'est pas uniformément continue dans un intervalle fini y admet des points de discontinuité » mais cet énoncé n'aura pas le même sens pour l'un et pour l'autre. Pour l'*E.* ce qui est démontré c'est l'existence d'un ensemble de points de discontinuité mais il n'est pas prouvé que nous puissions dissocier cet ensemble en les points qui le constituent. Un *E.* admettra que l'on raisonne sur les points de discontinuité de la fonction, ou même sur un point de discontinuité, à condition que dans le raisonnement tous les points de discontinuité jouent le même rôle; mais il n'admettra pas, comme le ferait l'*I.*, que certains des points de discontinuité aient dans le raisonnement un rôle spécial. Pour que cela soit légitime aux yeux de l'*E.* il faudrait que l'on ait découvert une propriété qui distingue des autres certains des points de discontinuité, sans quoi il lui paraît impossible d'attribuer un sens à des phrases comme celle-ci: « Choisissons un des points de discontinuité de la fonction » ...

On conçoit que l'*E.* rejette certaines des conclusions de l'*I.* et qu'on puisse se trouver obligé de prendre parti dans la querelle à l'occasion de fonctions très simples. Les mathématiciens adopteraient d'ailleurs presque tous rapidement la thèse idéaliste le jour où son utilité serait démontrée; s'il arrivait, par exemple, que, par l'emploi incident de déterminations idéalistes, on ait trouvé quelques propriétés importantes vérifiables ensuite par un raisonnement empiriste.

En présence d'un raisonnement que j'ai examiné, on pourrait bien entendu prendre d'autres attitudes; c'est ainsi que, si nous adoptions le point de vue de Kronecker, nous n'aurions même pas le droit de conclure à l'existence de l'ensemble des points de discontinuité parce que la contra-

diction que nous avons relevée ne nous permet pas de construire cet ensemble. Mais je veux m'occuper seulement des deux points de vue indiqués.

La question agitée entre *I.* et *E.* est, si l'on veut, l'existence de fonctions arbitraires, de fonctions sans loi. Seulement le mot *loi*, par lequel je désignais précédemment tout ce qu'on peut traduire par une expression analytique, désigne maintenant tout ce qu'on peut exprimer à l'aide de mots. Il me paraît probable qu'on ferait faire des progrès à la question si l'on réussissait à trouver, à l'aide de raisonnements empiristes des propriétés communes à toutes les fonctions de l'*E.* sans qu'elles appartiennent à toutes les fonctions de l'*I.* ce qu'il faudrait montrer par des considérations idéalistes. Bien entendu, dans une telle recherche il faudrait tenir compte, plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici, de ce que définir une fonction c'est la caractériser par un nombre fini de mots. Les propriétés qu'on obtiendrait seraient certainement très différentes de celles qui caractérisent les fonctions exprimables analytiquement car, d'une part, on peut nommer des fonctions non exprimables analytiquement et d'autre part, on ne peut pas nommer toutes les expressions analytiques que l'*I.* imagine: on ne pourrait pas nommer par exemple une série entière dont les coefficients ne seraient assujettis à aucune loi¹⁾.

CHAPITRE XXII

Ceux qui ont voulu élargir la notion de fonction ont toujours tiré argument de l'ignorance profonde dans laquelle nous sommes de la nature des fonctions déterminées physiquement.

L'*I.* à son tour, déclare qu'on doit considérer d'autres déterminations que les déterminations logiques si l'on veut pouvoir faire de la physique mathématique; car on doit pouvoir raisonner sur une fonction dès qu'elle est déterminée physiquement. A cela l'*E.* répond que l'expérience ne nous fait jamais connaître une fonction, mais seulement un nombre fini de nombres, par une interpolation nous en déduisons une fonction représentant le phénomène d'une manière approchée. Il est vrai que si l'on admet que cette approximation peut être aussi bonne que l'on veut, la difficulté reparaît. Mais rien ne nous oblige à admettre que l'approximation peut être poussée de plus en plus loin. Il me semble que chaque fois qu'on emploie un procédé

(10) De nombreuses études ont été faites par les logiciens sur les fonctions et nombres définissables. (cf. dans *J. of symbolic logic*, la bibliographie concernant ce sujet; voir en particulier les travaux de Gödel, Church, Kleene, Turing, Rosa Peter.) G. C.

de mesure plus parfait on définit à nouveau le nombre à obtenir; quand on mesure une route avec un mètre, ou quand on mesure la longueur d'onde d'une radiation lumineuse en mètres, par le procédé de Michelson, on emploie en réalité deux définitions différentes du mot longueur. Si l'on s'en tient à un procédé de mesure bien déterminé, c'est-à-dire à une définition particulière de la grandeur physique à mesurer, on apercevra toujours qu'il ne peut être rendu indéfiniment précis. Après une certaine précision limite il faudra recourir à un autre procédé, à une autre définition, pour aller plus loin; mais rien ne nous oblige à admettre qu'il est possible d'imaginer des procédés de plus en plus précis; en tous cas cette suite indéfinie de procédés n'est pas déterminée physiquement. Aussi peut-on penser qu'il entre beaucoup d'illusion dans la conception que l'*I.* se fait d'une mesure exacte.

L'*I.* trouve qu'en raisonnant ainsi on tourne les difficultés mais qu'on ne les résoud pas; l'*I.* de du Bois Reymond, après avoir exposé son système, ajoute: « ainsi, quand nous nous abandonnons à ces pensées qui paraissent si naturelles, l'*E.* voit en cela un égarement de l'instinct de connaissance. Il est possible que son intuition du monde le garantisse de mainte illusion, toutefois le renoncement qu'il s'impose n'est pas précisément le fait de chacun. En ne donnant un libre cours à ses pensées que dans les limites des représentations et des concepts qui répondent à des perceptions ou en sont abstraits, il agit comme l'enfant sage qui se garde bien de franchir la haie du jardin. La pensée idéaliste est le garçon pétulant qui se moque des limites, revendique comme sien le domaine entier des représentations et pressentiments et arrive à franchir les broussailles, à gravir les roches pour atteindre à des hauteurs d'où l'œil embrasse un vaste horizon. Il pourra s'égarter, mais à coup sûr il verra plus de choses que l'enfant sage ». Ailleurs il dit: « Les *I.* s'éteindront-ils un jour ? je ne le crains pas. Comme *I.* j'ai sûrement une avance sur l'*E.* Quand je tiens mon système pour exact, je n'ai pas besoin de considérer le sien comme faux ».

Il est certain que jusqu'ici ce sont toujours ceux qui voulaient élargir la notion de fonction qui se sont trouvés avoir raison; en sera-t-il encore de même ainsi que l'affirme du Bois Reymond pour cette nouvelle extension que propose l'*I.* ? Il est difficile de le prévoir; mais si les fonctions de l'*I.* se montraient utiles ou commodes pour l'explication des phénomènes naturels, les mathématiciens attacheraient moins d'importance aux difficultés de principe que leur emploi paraît soulever. Jusqu'à présent les *E.* et les *I.* se sont presque uniquement bornés à des discussions théoriques, les *E.* donnent volontiers une forme idéaliste à leurs raisonnements et les *I.* n'ont pas essayé d'étudier leur notion de fonction; il me paraît probable

que l'utilité de cette notion ne pourrait être mise en évidence qu'après une telle étude.

On pourrait penser, il est vrai, que l'inutilité de cette notion est dès maintenant prouvée, on pourrait dire: l'image d'une fonction déterminée physiquement ce n'est pas une courbe mais un nombre fini de points ou un nombre fini de rectangles, quand on a des renseignements sur les erreurs commises sur la variable et la fonction; dès lors, si l'on veut employer les fonctions mathématiques, il suffira de prendre une quelconque de ces fonctions pourvu qu'elle soit représentée par une courbe passant par tous les points ou dans tous les rectangles. Il est donc toujours inutile d'employer les fonctions de l'*I*. ou les fonctions discontinues de l'*E*.

Si l'on ne voulait introduire aucune hypothèse, il faudrait faire un raisonnement s'appliquant à toutes les fonctions continues ou non, d'accord avec l'expérience, et non pas choisir une des fonctions d'accord avec l'expérience, et raisonner sur elle; ou bien encore il faudrait raisonner directement sur les ensembles de points ou de rectangles que l'expérience fournit. Mais jusqu'à présent on ne sait effectuer aucune opération sur ces fonctions définies expérimentalement sur lesquelles M. Klein a attiré l'attention.

En particulier on ne voit pas ce que pourrait être que la dérivation de ces fonctions¹⁾. On sait que la dérivée d'une fonction très petite peut être une fonction très grande en certains points ou, si l'on veut, que deux fonctions très voisines peuvent avoir des dérivées très différentes; et c'est pourquoi une série uniformément convergente n'est pas toujours dérivable terme à terme. Si donc de l'expérience nous déduisons une fonction approchée d'une autre fonction *f*, nous ne pourrons rien conclure relativement aux dérivées de *f* et par suite, si l'on ne voulait introduire aucune hypothèse, il faudrait, dans l'état actuel de nos connaissances, renoncer à l'emploi des équations différentielles à l'aide desquelles est construite toute la physique mathématique moderne. Aussi, au lieu de raisonner sur toutes les fonctions d'accord avec l'expérience, on choisit l'une d'elles par des considérations de simplicité et de commodité.

Tant qu'on n'a rien su sur les fonctions discontinues ces considérations de commodité commandaient impérieusement de choisir pour le raisonnement une fonction continue, ce qui est toujours possible; aussi les fonctions discontinues n'ont-elles été employées pendant longtemps que dans le seul

¹⁾ Les distributions de L. Schwartz ont justement été créées pour répondre à ce besoin. Elles permettent de donner un sens à la dérivée d'une fonction sommable quelconque.

Il est remarquable que Lebesgue ait si bien senti le besoin de cet outil et ait su l'exprimer aussi clairement.

cas du choc. Comme on ne connaît actuellement rien sur les fonctions de l'*I*, c'est toujours une fonction de l'*E* qu'on choisit, mais comme on commence à savoir manier les fonctions discontinues il est possible d'introduire de telles fonctions dans les raisonnements et même, bien qu'il y ait de grandes différences entre le discontinu physique et le discontinu mathématique, il n'est pas invraisemblable que les fonctions discontinues soient particulièrement commodes pour l'étude de certaines théories où le discontinu physique intervient. C'est ainsi que certains mathématiciens espèrent utiliser quelques résultats récents de la théorie des fonctions pour l'éclaircissement des raisonnements souvent obscurs, parfois incohérents, de la théorie cinétique des gaz.¹⁾

En poursuivant la solution de problèmes abordés depuis longtemps par des méthodes qui, croyait-on, n'utiliseraient pas de fonctions discontinues on est souvent conduit cependant à la considération de telles fonctions, c'est ce qui arrive constamment, par exemple, en hydrodynamique. De sorte que les études sur les fonctions générales trouveront peut-être là leur utilisation.

Tantôt les discontinuités que l'on rencontre affectent la fonction, tantôt elles n'affectent que ses dérivées; c'est ainsi que M. Hadamard vient de montrer que pour l'étude des plaques élastiques minces il était nécessaire d'admettre que certaines fonctions que l'on introduit dans cette étude ne sont pas dérivable. Sans doute ce ne sont pas nécessairement de ces fonctions partout sans dérivées comme Weierstrass en a construit, mais il suffit que ce soient des fonctions dont on ne peut utiliser les dérivées à la manière ordinaire pour que l'on soit en droit d'espérer que certains des travaux dont j'ai parlé aident à trancher les difficultés que l'on rencontre. Je terminerai en montrant par un exemple l'influence que cela peut avoir sur les résultats d'admettre ou non que les fonctions que l'on rencontre sont dérivable.

CHAPITRE XXIII

Proposons-nous de déterminer les formes différentes que peut prendre une feuille de papier que l'on froisse.

Si l'on trouve une courbe sur cette feuille de papier on constate facile-

¹⁾ Depuis, les physiciens ont utilisé sans scrupule les masses ponctuelles (fonction de Dirac) et leurs dérivées de tout ordre. Ces procédés n'ont été justifiés que plus tard, en partie par le calcul symbolique, puis de façon rigoureuse et commode par les distributions.

ment que sa longueur varie peu, alors il sera naturel de traduire mathématiquement le problème de la manière suivante: trouver les surfaces dont les points correspondent à ceux d'une portion de plan, la correspondance étant biunivoque et continue, et conservant les longueurs; c'est-à-dire trouver les surfaces applicables sur le plan.

On sait que la réponse classique à cette question est la suivante: il y a identité entre la famille des surfaces applicables sur le plan et la famille des surfaces dites développables qui sont formées par les tangentes à une courbe gauche ou encore, si l'on veut, qui sont enveloppes d'un plan variable dépendant d'un paramètre. Ces surfaces développables ne fournissent même pas grossièrement la solution du problème physique; on peut trouver à cela diverses raisons.

Les uns diront que le problème physique a été mal traduit. Il ne s'agit pas de la déformation d'une surface, mais de celle d'un corps ayant trois dimensions, et les longueurs ne sont pas exactement conservées. Cela est incontestable; cependant, nous pouvons répondre à la première objection en disant que c'est se conformer aux habitudes que d'assimiler à une surface un corps dont une des dimensions est très petite et que d'une telle assimilation on arrive ordinairement à tirer une solution suffisante dans la pratique de problème qu'on se proposait. Quant à la seconde objection, ou bien il faut passer outre ou bien il faut rechercher toutes les surfaces qui sont à peu près applicables sur le plan, puisque nous ne savons rien sur la loi de variation des longueurs. C'est là un problème certainement intéressant et qui est en relation simple avec celui des plaques élastiques qu'à étudié M. Hadamard.

Mais on peut remarquer aussi qu'il existe des surfaces exactement applicables sur le plan et qui ne sont pas des surfaces développables. Il est facile, par exemple, de trouver des surfaces polyédriques, non convexes, qui ne sont ni des surfaces prismatiques, ni des surfaces pyramidales et qui sont cependant applicables sur le plan sans déchirure ni duplication. Or il faut remarquer que par un pliage convenable d'une feuille de papier on peut obtenir des réalisations matérielles de ces surfaces aussi parfaites qu'est la réalisation d'un plan sous forme d'une feuille de papier. Si incontestables que soient les objections indiquées, qui peuvent contenir le germe d'une autre solution du même problème physique, il semble donc bien qu'on doive reprendre l'étude du problème géométrique lui-même. La seule hypothèse faite dans la solution classique de ce problème est celle de l'existence si l'on n'admet pas que cette existence est nécessaire, on trouve des surfaces applicables sur le plan autre que les surfaces développables. Ces surfaces

n'ont pas toutes été étudiées, on ne peut pas dire si toutes fournissent bien une solution approchée du problème physique; mais il est remarquable que toutes celles de ces surfaces qui sont de révolution et dont certaines ne contiennent aucun morceau de droite sont réalisables à l'aide de la feuille de papier d'une manière aussi approchée qu'il est désirable.

S'il fallait avoir souvent recours pour l'explication de phénomènes naturels à des solutions analogues à celle que je viens d'indiquer, ce qu'on regretterait sans doute, le plus, c'est que ces solutions n'utilisent aucune expression analytique qui fournirait vraisemblablement l'occasion d'appliquer les si nombreux résultats que nous possédons concernant les fonctions analytiques et celles qui en dérivent simplement. Il est bien probable que de toute façon, une telle utilisation ne tarderait pas; en ce qui concerne le problème des surfaces applicables sur le plan, si l'on se rappelle que les coordonnées x, y, z des points d'une courbe rectifiable d'arc s vérifient presque partout la relation classique

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

il est possible d'espérer que les équations

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

pourront encore servir de quelque manière à caractériser les surfaces applicables sur le plan et à les obtenir toutes.

Je voudrais avoir réussi à montrer l'intérêt des travaux dont j'ai parlé et que j'ai choisis un peu arbitrairement plutôt parce que je les connaissais mieux que parce qu'ils sont plus importants. On croit trop souvent que la théorie générale des fonctions de variables réelles a donné depuis longtemps tout ce qu'elle était capable de fournir qui soit utile au progrès général des mathématiques et qu'on ne peut plus actuellement s'intéresser à cette théorie que par amour des complications et pour le plaisir de rencontrer des difficultés à vaincre.

Peut-être faut-il une nature particulière d'esprit pour s'intéresser à ce genre de questions ? Si cela est, on doit, il me semble, se féliciter que cette tournure d'esprit se rencontre parfois et souhaiter que ceux qui l'ont arrivent à introduire ordre et simplicité là où le désordre et la complication règnent actuellement, en apparence du moins; mais il n'y a pas là de rai-

sons suffisantes pour déclarer inutiles les recherches sur les fonctions réelles.¹⁾

Ceux qui ont bien voulu me lire se demanderont sans doute s'il est évident qu'elles seront nécessairement sans intérêt les réponses qu'on arrivera peut-être à faire à ces questions dont j'ai parlé et qui, posées à l'occasion de problèmes simples et naturels dès l'époque de l'invention du calcul infinitésimal, furent alors jugées très importantes à résoudre pour les progrès généraux de l'Analyse. Au reste, il serait facile de montrer que la théorie générale des fonctions réelles a été utilisée dans certains travaux récents sur les fonctions analytiques de variables complexes à la considération desquelles on a voulu parfois restreindre l'Analyse. C'est ainsi que dans l'étude des séries entières, dans l'étude des équations différentielles, on a eu l'occasion d'utiliser des modes de raisonnements, des distinctions ou des définitions auxquelles la théorie des fonctions réelles nous a habitués et dont elle nous a révélé l'importance.

¹⁾ Ce ton polémique et un peu amer est le reflet des critiques que subissaient alors la jeune école française de la part des mathématiciens plus classiques pour lesquels toute fonction était continue ou même analytique. L'avenir a amplement montré que les craintes de Lebesgue n'étaient pas fondées et l'on ne songe plus, comme il le fait un peu plus bas, à justifier par ses applications à la théorie des fonctions analytiques, la théorie des « fonctions réelles » (qui s'est aujourd'hui tellement développée qu'elle englobe en fait aujourd'hui l'ensemble de l'analyse). G. C.

(*Reçu le 2 février 1971*)