

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	17 (1971)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS
<b>Autor:</b>	Heuzé, G.
<b>Kapitel:</b>	2. Questions d'existence
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-44583">https://doi.org/10.5169/seals-44583</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. QUESTIONS D'EXISTENCE

2.1. *L'existence d'un  $[v, b, r, k, \lambda]$  entraîne celle d'un  $[v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda]$ .*

Il suffit en effet de remplacer tout bloc  $B_j$  par  $E - B_j$ .

2.2. *L'existence d'un  $[v, b, r, k, \lambda]$  entraîne, pour tout entier  $t$ , celle d'un  $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ .*

Il suffit en effet de répéter  $t$  fois chaque bloc.

Mais il peut exister un  $[v, tb, tr, k, t\lambda]$  sans qu'il existe un  $[v, b, r, k, \lambda]$ . Ainsi il existe un  $[15, 42, 14, 5, 4]$  mais pas de  $[15, 21, 7, 5, 2]$ .

2.3. *L'existence d'un  $[v, k, \lambda]$  entraîne celle d'un  $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$ .*

$B_1$  étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *résiduel* du premier relativement à  $B_1$ ) est constitué, sur  $E - B_1$ , des blocs  $B_j \cap (E - B_1)$  ( $j = 2, \dots, v$ ).

Ainsi le résiduel d'un plan projectif d'ordre  $n$  est un plan affine d'ordre  $n$ .

Réciiproquement on montre:

*Pour  $\lambda = 1$  ou  $2$ , tout  $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$  est résiduel d'un  $[v, k, \lambda]$ . Le problème de cette réciprocité n'est pas résolu pour  $\lambda \geq 3$ . Toutefois il existe un  $[12, 33, 28, 8, 14]$  mais pas de  $[34, 22, 14]$ .*

2.4. *L'existence d'un  $[v, k, \lambda]$  (ou  $\lambda \geq 2$ ) entraîne celle d'un  $[k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1]$ .*

$B_1$  étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *dérivé* du premier relativement à  $B_1$ ) est constitué, sur  $B_1$ , des blocs  $B_j \cap B_1$  ( $j = 2, \dots, v$ ).

2.5. Mais le plus beau résultat relatif à l'existence des plans équilibrés est le théorème de BRUCK — RYSER — CHOWLA — SHRIKHANDE — SCHUTZENBERGER :

*Pour qu'il existe un  $[v, k, \lambda]$  (où naturellement, compte tenu de (1.3),  $\lambda(v-1) = k(k-1)$ ) il est nécessaire que*

— *si  $v$  est pair,  $(k-\lambda)$  soit un carré parfait,*

— *si  $v$  est impair, l'équation  $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$  ait une solution non nulle en nombres entiers.*

Ainsi il n'existe pas de  $[22, 7, 2]$  ni de  $[43, 7, 1]$ .

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas  $k = 2$  étant trivial):

*Si  $k = 3$  ou  $4$  les conditions nécessaires (1.3) sont aussi suffisantes pour l'existence d'un  $[v, b, r, k, \lambda]$ .*

Mais cela n'est plus vrai à partir de  $k = 5$ : ainsi  $[15, 21, 7, 5, 2]$  et  $[36, 42, 7, 6, 1]$  n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par  $b$  croissants (car  $b \geq v > k$  et  $b > r > \lambda$ ) soit — c'est la tradition — par  $r$  croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand  $r$  est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour  $r \leq 15$ . On y a toujours  $v \geq 2k$  (compte tenu de (2.1)) et les  $[v, tb, tr, k, t\lambda]$  sont omis quand il existe un  $[v, b, r, k, \lambda]$ . Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ( $[46, 69, 9, 6, 1]$  étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement:  $[56, 11, 2]$ ,  $[45, 12, 3]$ ,  $[36, 15, 6]$ . Signalons enfin une conjecture:  $v$  et  $k$  étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en  $b, r, \lambda$ ) il existe toujours un  $[v, b, r, k, \lambda]$  sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

### 3. QUESTIONS D'« UNICITÉ »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

*Définition.* — Deux  $[v, b, r, k, \lambda]$  seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences  $A_1$  et  $A_2$  sont telles qu'il existe deux matrices de permutation  $P$  et  $Q$ , d'ordres  $v$  et  $b$  respectivement, vérifiant  $A_1 = P A_2 Q$ .

3.2. Pour  $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$  il existe un seul plan projectif (resp. affine) d'ordre  $n$ .

Mais ce n'est plus vrai pour  $n = 9$ . On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour  $n$  premier. Mais pour certaines valeurs de  $n$  primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre  $n$  non isomorphes deux à deux [3].

3.3. Les plans pour lesquels  $k = 3$  et  $\lambda = 1$  (appelés triplets de Steiner) sont uniques pour  $v = 3, 7, 9$ . Il y a deux solutions pour  $v = 13$  et 80 solutions pour  $v = 15$ . Le nombre de solutions est inconnu pour  $v > 15$ .