Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS

Autor: Heuzé, G.

Kapitel: 2. Questions d'existence

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44583

2. Questions d'existence

2.1. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda]$.

Il suffit en effet de remplacer tout bloc B_j par $E - B_j$.

2.2. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne, pour tout entier* t, *celle d'un* $[v, tb, tr, k, t\lambda]$.

Il suffit en effet de répéter t fois chaque bloc.

Mais il peut exister un $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sans qu'il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Ainsi il existe un [15, 42, 14, 5, 4] mais pas de [15, 21, 7, 5, 2].

2.3. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *résiduel* du premier relativement à B_1) est constitué, sur $E - B_1$, des blocs $B_j \cap (E - B_1)$ $(j = 2, ..., v)$.

Ainsi le résiduel d'un plan projectif d'ordre n est un plan affine d'ordre n.

Réciproquement on montre:

Pour $\lambda = 1$ *ou* 2, *tout* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$ *est résiduel d'un* $[v, k, \lambda]$. Le problème de cette réciproque n'est pas résolu pour $\lambda \geqq 3$. Toutefois il existe un [12, 33, 28, 8, 14] mais pas de [34, 22, 14].

2.4. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *(ou* $\lambda \geqq 2$*) entraîne celle d'un* $[k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *dérivé* du premier relativement à B_1) est constitué, sur B_1, des blocs $B_j \cap B_1$ $(j = 2, ..., v)$.

2.5. Mais le plus beau résultat relatif à l'existence des plans équilibrés est le théorème de Bruck — Ryser — Chowla — Shrikhande — Schutzenberger:

Pour qu'il existe un $[v, k, \lambda]$ (où naturellement, compte tenu de (1.3), $\lambda(v-1) = k(k-1)$) *il est nécessaire que*

— *si* v *est pair,* $(k-\lambda)$ *soit un carré parfait,*

— *si* v *est impair, l'équation* $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2$ *ait une solution non nulle en nombres entiers.*

Ainsi il n'existe pas de [22, 7, 2] ni de [43, 7, 1].

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas $k = 2$ étant trivial):

Si $k = 3$ *ou* 4 *les conditions nécessaires* (1.3) *sont aussi suffisantes pour l'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$.

Mais cela n'est plus vrai à partir de $k = 5$: ainsi [15, 21, 7, 5, 2] et [36, 42, 7, 6, 1] n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par b croissants (car $b \geqq v > k$ et $b > r > \lambda$) soit — c'est la tradition — par r croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand r est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour $r \leqq 15$. On y a toujours $v \geqq 2k$ (compte tenu de (2.1)) et les $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sont omis quand il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ([46, 69, 9, 6, 1] étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement: [56, 11, 2], [45, 12, 3], [36, 15, 6]. Signalons enfin une conjecture: v et k étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en b, r, λ) il existe toujours un $[v, b, r, k, \lambda]$ sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

3. Questions d'« unicité »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

Définition. — Deux $[v, b, r, k, \lambda]$ seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences A_1 et A_2 sont telles qu'il existe deux matrices de permutation P et Q, d'ordres v et b respectivement, vérifiant $A_1 = P A_2 Q$.

3.2. *Pour* $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ *il existe un seul plan projectif* (resp. *affine*) *d'ordre* n.

Mais ce n'est plus vrai pour $n = 9$. On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour n premier. Mais pour certaines valeurs de n primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre n non isomorphes deux à deux [3].

3.3. *Les plans pour lesquels* $k = 3$ et $\lambda = 1$ (appelés triplets de Steiner) *sont uniques pour* $v = 3, 7, 9$. *Il y a deux solutions pour* $v = 13$ *et* 80 *solutions pour* $v = 15$. Le nombre de solutions est inconnu pour $v > 15$.