

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1971)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES  
**Autor:** Mignotte, Maurice  
**Kapitel:** Critère d'irréductibilité  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44580>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UN CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES

par Maurice MIGNOTTE

## NOTATIONS

$A$  désigne un anneau commutatif unitaire tel que tout élément non nul de  $A$  n'a qu'un nombre fini de diviseurs.

$P$  est un polynôme de degré  $d \geq 1$  de  $A[x]$ .

$u = u(P) =$  nombre d'éléments  $a \in A$  tels que  $P(a)$  soit une « unité » de  $A$ .

$i = i(P) =$  nombre d'éléments  $a \in A$  tels que  $P(a)$  soit irréductible dans  $A$ .

Remarquons d'abord que 1 n'a qu'un nombre fini de diviseurs, ainsi il n'y a qu'un nombre fini d'unités  $e_1, e_2, \dots, e_k$  dans  $A$ .

Soient  $a_{j,1}, \dots, a_{j,u_j}$  les éléments tels que  $P(a) = e_j, j = 1, \dots, k$ .  $A$  étant intègre, on a l'inégalité  $u_j \leq d$ . Donc  $u = u_1 + \dots + u_k$  est fini. Par contre, il peut se faire que  $i$  ne soit pas fini, si tel est le cas, dans tout ce qui suit on pourra remplacer  $i$  par un entier  $i'$  assez grand.

## CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ

*Théorème :* Il existe une constante  $c$  (ne dépendant que de  $A$ ) telle que l'inégalité

$$i + 2u - d > c$$

implique l'irréductibilité de  $P$  sur  $A[x]$ .

Démonstration :

Supposons que l'on ait  $P = Q.R$  avec  $Q, R \in A[x]$ , avec  $\deg(Q), \deg(R) \geq 1$ .

Les implications

$P(a)$  irréductible  $\Rightarrow Q(a)$  ou  $R(a)$  inversible,

$P(a)$  inversible  $\Rightarrow Q(a)$  et  $R(a)$  inversibles,

conduisent à l'inégalité

$$u(Q) + u(R) \geq i + 2u$$

ou encore à

$$f(Q) + f(R) \geq i + 2u - d$$

avec

$$f(Q) = u(Q) - \deg(Q), \quad f(R) = u(R) - \deg(R).$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une constante  $F$  telle que  $f(S) \leq F$  pour tout  $S \in A[x]$ , il est clair que le théorème sera vrai avec  $c = 2F$ .

Soit, par exemple,  $u_1 = \max_{1 \leq j \leq k} (u_j)$  et  $u_2 = \max_{2 \leq j \leq k} (u_j)$ .

Si  $u_2 = 0$ , alors on a  $f \leq 0$ , il n'y a rien à démontrer.

Sinon on peut écrire

$$P(X) = (X - a_{1,1}) \dots (X - a_{1,u_1}) P_1(X) + e_1$$

avec

$$P_1(X) \in A[X], \quad \text{et} \quad P(a_{2,1}) = e_2.$$

Ainsi les  $a_{2,1} - a_{1,k}$  sont des diviseurs de  $e_1 - e_2$  il n'y en a qu'un nombre fini  $n$ , par suite  $u_1 \leq n$ . Il en résulte que

$$f = u - d \leq ku_1 - d \leq kn - 1.$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles de  $e_1 - e_2$ , l'existence de  $F$  est bien démontrée. Ceci achève la démonstration.

### Exemples

$A = \mathbf{Z}$ ;  $c = 4$  convient.

$A = \text{anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire}$

Si  $A = \mathbf{Z}[i]$ ,  $c = 8$  convient ( $i^2 = -1$ ).

Si  $A = \mathbf{Z}[j]$ ,  $c = 16$  convient ( $j^3 = 1$ ).

Sinon  $c = 4$  convient.

$A = \mathbf{F}_q[X]$ ,  $\mathbf{F}_q$  corps fini à  $q$  éléments, il est clair que  $c = 2((q-1)^2 - 1)$  convient.

(Reçu le 1<sup>er</sup> juin 1971)

Maurice Mignotte

Faculté des Sciences

Place du 8-Mai 1945

F-93 — Saint-Denis