

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU
Autor: Batbedat, André
Kapitel: Aspect matriciel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44577>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$(w + u)^2 = (-w + u)^2 = u^2 = 1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.

Réciproquement toute contraction $m \rightarrow um + v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme :

$$m \rightarrow um + v; \text{ avec } v, u \text{ dans } A \text{ et } u^2 = 1.$$

ASPECT MATRICIEL

On a une isométrie à point 0 fixe ssi $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = 0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta = 0; \alpha + \beta = 1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \rightarrow um$ étant associée à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on a : $u = \alpha - \beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m) = \gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathcal{C}_{(1, (1-\gamma))}$.

En effet :

$$1 - \gamma = 1 - \varepsilon_1(m) = \delta_1(m) = d(1, m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ , de B tels que $\alpha\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 1$, l'ensemble des points m vérifiant :

$$\alpha \cdot \varepsilon_1(m) + \beta \cdot \varepsilon_2(m) = \gamma ;$$

est le cercle de centre $u = \alpha - \beta$ et de rayon $(1 - \gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m' = um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m') = \gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1 - \gamma)$ et de centre u image de 1.

Propriété 24 :

Une contraction T est déterminée par la donnée d'un 1-triplet et de son image par T .

Soit T la contraction $m \rightarrow wm^2 + um + v = m'$. Par hypothèse on donne a, b, c tels que $d(a, b) = d(b, c) = d(c, a) = 1$, et leurs images par $T : a', b', c'$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse : « a, b, c est un 1-triplet », la matrice :

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & b^2 - c^2 - a^2 & c^2 - a^2 - b^2 \\ a - b - c & b - c - a & c - a - b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ est inverse de } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

ce qui détermine v, u, w .

Remarque 14 :

Compte tenu de la remarque 10, \mathcal{A}' peut encore s'écrire :

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ -a & -b & -c \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} -v &= -a'bc - b'ca - c'ab \\ -u &= -aa' - bb' - cc' \\ -w &= -a' - b' - c' \end{aligned}$$

Définition 13 :

On appelle *affinité de rapport* $\alpha \in B$ une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est :

$$a' = a; \quad b' = b; \quad c' = (1 + \alpha)b - \alpha a$$

Ainsi a et b sont invariants et l'image de c est l'unique point i_α du disque \mathcal{D}^{ab} pour lequel $d(b, i_\alpha) = \alpha \cdot d(a, i_\alpha)$ (propriété 12).

$$\cdot d(a, c') = 1; \quad d(b, c') = \alpha; \quad d(c, c') = (1 - \alpha).$$

Appliquant les formules de la remarque 14 on détermine :

$$\begin{aligned}v &= ab(b-a)(1-\alpha) \\u &= 1+(b-a)(1-\alpha)c \\w &= (b-a)(1-\alpha)\end{aligned}$$

d'où: $m' = m + w(m^2 + cm + ab)$

ce qui s'écrit:

$$\boxed{m' = m - w \cdot (1 - d(c, m))}, \quad \text{avec } w = (b-a)(1-\alpha) \quad (6)$$

Repérons les points dans la base métrique: $\{a, c\}$.

$$\begin{aligned}d(c, m') &= [(m-c) - w(1-d(c, m))]^2 \\d(c, m') &= d(c, m) + (1-\alpha)(1-d(c, m))\end{aligned}$$

$$\boxed{d(c, m') = (1-\alpha) + \alpha \cdot d(c, m)} \quad (7)_c$$

$$\begin{aligned}d(a, m') &= [(m-a) - w(1-d(c, m))]^2 \\d(a, m') &= d(a, m) + (1-\alpha)(1-d(c, m))(1+(b-a)(m-a)) \\d(a, m') &= d(a, m) + (1-\alpha)(1-d(c, m))(b-a)(m-c)\end{aligned}$$

$$\boxed{d(a, m') = d(a, m)} \quad (7)_a$$

Remarque 15:

On voit (formules (7)) que les points invariants pour une affinité de rapport α définie par a, b, c et son image, vérifient:

$$d(c, m) = (1-\alpha) + \beta \quad \text{avec } \beta \leq \alpha$$

Il en résulte en particulier que α est un élément caractéristique pour la transformation considérée.

Définition 14:

Une affinité de rapport nul est une *projection*.

Ainsi une projection est une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a' = a; \quad b' = b; \quad c' = b$$

T étant une projection on a pour tout $m \in A$, repéré dans la base métrique $\{a, c\}$:

$$m \left| \begin{array}{c} d(a, m) \\ d(c, m) \end{array} \right| \begin{array}{c} \xrightarrow{T} \\ \rightarrow m' \end{array} \left| \begin{array}{c} d(a, m) \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \xrightarrow{T} \\ \rightarrow m'' \end{array} \left| \begin{array}{c} d(a, m) \\ 1 \end{array} \right|$$

Compte tenu des formules (7) pour $\alpha=0$, d'où:

Propriété 25 :

Toute projection est une contraction idempotente.

L'image de A est le cercle de centre c et de rayon 1 ; c'est aussi l'ensemble des points invariants.

Exemple :

La contraction définie par 0, 1, 2 et son image 0, 1, 1, ($a=a'=0$, $b=b'=1$, $c=2$, $c'=b$) est une projection

L'image de A est le cercle de centre 2 et de rayon 1 : c'est B . Elle est définie par $m'=m^2$.

Remarque 16 :

La propriété 15 montre que sur l'image de A par projection il n'existe pas de triplet équilatéral.

Remarque 17 :

On voit facilement que toute contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est a, a, a envoie tout point m en a .

Définition 15 :

Une application de A dans A est une *similitude de rapport* $\alpha \in B$ si pour tous m, n et leur image m', n' :

$$d(m', n') = \alpha d(m, n)$$

Ainsi une similitude de rapport α est une contraction. Elle transforme tout β -triplet en un $\alpha\beta$ -triplet, tout cercle (resp: disque) de rayon ρ en un cercle (resp: disque) de rayon $\alpha \cdot \rho$.

Considérons la similitude définie par $m' = wm^2 + um + v$. L'image du 1-triplet a, b, c est un α -triplet: on a nécessairement $w = -a' - b' - c'$ (Remarque 14)

d'où $w=0$ (remarque 10)

Alors $u^2 \cdot d(m, n) = d(m', n')$

Propriété 26 :

Les similitudes sont les transformations de la forme $m \rightarrow um + v$; le rapport est u^2 .

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par T .

En effet :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \rightarrow un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement :

$$(1 - u^2) m = (1 - u^2) v$$

$$\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$$

$$\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$, l'ensemble des points m invariants est donné par :

$$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))v + \varepsilon_1(u) \cdot t, \quad t \in A$$

c'est le disque

$$\mathcal{D}_{[(1-u^2-\varepsilon_2(u))v, \varepsilon_1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \rightarrow un + v$ a des points invariants ssi $v \cdot \varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathcal{D}_{[(1-u^2-\varepsilon_2(u))v, \varepsilon_1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.