**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 17 (1971)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU
**Autor:** Batbedat, André
**Kapitel:** Aspect matriciel
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-44577

$$(w+u)^2=(-w+u)^2=u^2=1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.

Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

*Propriété 21 :*

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v; \text{ avec } v, u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1 \ .$$

## Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\frac{\square}{\square}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

*Propriété 22 :*

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha$, $\beta$ idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

*Remarque 13 :*

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

*Lemme : 3*

L'ensemble des points $m$ pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, $\gamma$ fixé, est le cercle $\mathscr{C}_{(1,(1-\gamma))}$.

En effet:

$$1-\gamma=1-\varepsilon_1(m)=\delta_1(m)=d(1,m)$$

*Propriété 23 :*

Pour tous $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de $B$ tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points $m$ vérifiant:

$$\alpha \ . \ \varepsilon_1(m)+\beta \ . \ \varepsilon_2(m)=\gamma \ ;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points $m$ considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points $m'$ pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre $u$ image de 1.

*Propriété 24 :*

Une contraction $T$ est déterminée par la donnée d'un 1-triplet et de son image par $T$.

Soit $T$ la contraction $m \to wm^2+um+v=m'$. Par hypothèse on donne $a, b, c$ tels que $d(a, b)=d(b, c)=d(c, a)=1$, et leurs images par $T$ : $a', b', c'$. On a donc:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse: « $a, b, c$ est un 1-triplet », la matrice:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & b^2-c^2-a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ a-b-c & b-c-a & c-a-b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{est inverse de } \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

ce qui détermine $v, u, w$.

*Remarque 14 :*

Compte tenu de la remarque 10, $\mathscr{A}'$ peut encore s'écrire:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ -a & -b & -c \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} -v &= -a'bc - b'ca - c'ab \\ -u &= -aa' - bb' - cc' \\ -w &= -a' - b' - c' \end{aligned}$$

*Définition 13 :*

On appelle *affinité de rapport* $\alpha \in B$ une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet $a, b, c$ dont l'image est:

$$a'=a; \quad b'=b; \quad c'=(1+\alpha)\, b-\alpha a$$

Ainsi $a$ et $b$ sont invariants et l'image de $c$ est l'unique point $i_\alpha$ du disque $\mathscr{D}^{ab}$ pour lequel $d(b, i_\alpha) = \alpha \,.\, d(a, i_\alpha)$ (propriété 12).

$$\cdot\, d(a, c')=1\,; \quad d(b, c')=\alpha\,; \quad d(c, c')=(1-\alpha)\,.$$

Appliquant les formules de la remarque 14 on détermine:

$$
\begin{aligned}
v &= ab\,(b-a)\,(1-\alpha)\\
u &= 1+(b-a)\,(1-\alpha)\,c\\
w &= (b-a)\,(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

d'où: $m'=m+w\,(m^2+cm+ab)$
ce qui s'écrit:

$$\boxed{m'=m-w\cdot\big(1-d\,(c,m)\big),\quad avec\quad w=(b-a)\,(1-\alpha)} \tag{6}$$

Repérons les points dans la base métrique: $\{\,a,c\,\}$.

$$
\begin{aligned}
d\,(c,m') &= \big[(m-c)-w\big(1-d\,(c,m)\big)\big]^2\\
d\,(c,m') &= d\,(c,m)+(1-\alpha)\big(1-d\,(c,m)\big)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d\,(c,m')=(1-\alpha)+\alpha\cdot d\,(c,m)} \qquad (7)_c$$

$$
\begin{aligned}
d\,(a,m') &= \big[(m-a)-w\big(1-d\,(c,m)\big)\big]^2\\
d\,(a,m') &= d\,(a,m)+(1-\alpha)\big(1-d\,(c,m)\big)\big(1+(b-a)\,(m-a)\big)\\
d\,(a,m') &= d\,(a,m)+(1-\alpha)\big(1-d\,(c,m)\big)\,(b-a)\,(m-c)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d\,(a,m')=d\,(a,m)} \qquad (7)_a$$

*Remarque 15 :*

On voit (formules (7)) que les points invariants pour une affinité de rapport $\alpha$ définie par $a$, $b$, $c$ et son image, vérifient:

$$d\,(c,m)=(1-\alpha)+\beta \qquad avec\ \ \beta\leqq\alpha$$

Il en résulte en particulier que $\alpha$ est un élément caractéristique pour la transformation considérée.

*Définition 14 :*

Une affinité de rapport nul est une *projection.*

Ainsi une projection est une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet $a$, $b$, $c$ dont l'image est:

$$a'=a\,;\ \ b'=b\,;\ \ c'=b$$

$T$ étant une projection on a pour tout $m\in A$, repéré dans la base métrique $\{\,a,c\,\}$:

$$m\ \left|\begin{matrix} d\,(a,m)\\ \\ d\,(c,m)\end{matrix}\right.\ \xrightarrow{\ \mathrm{T}\ } m'\ \left|\begin{matrix} d\,(a,m)\\ \\ 1\end{matrix}\right.\ \xrightarrow{\ \mathrm{T}\ } m''\ \left|\begin{matrix} d\,(a,m)\\ \\ 1\end{matrix}\right.$$

Compte tenu des formules (7) pour $\alpha=0$, d'où:

*Propriété 25 :*

Toute projection est une contraction idempotente.

L'image de $A$ est le cercle de centre $c$ et de rayon 1 ; c'est aussi l'ensemble des points invariants.

*Exemple :*

La contraction définie par 0, 1, 2 et son image 0, 1, 1, ($a=a'=0$, $b=b'=1$, $c=2$, $c'=b$) est une projection

L'image de $A$ est le cercle de centre 2 et de rayon 1: c'est $B$. Elle est définie par $m'=m^2$.

*Remarque 16 :*

La propriété 15 montre que sur l'image de $A$ par projection il n'existe pas de triplet équilatéral.

*Remarque 17 :*

On voit facilement que toute contraction pour laquelle il existe un 1-triplet $a$, $b$, $c$ dont l'image est $a$, $a$, $a$ envoie tout point $m$ en $a$.

*Définition 15 :*

Une application de $A$ dans $A$ est une *similitude de rapport* $\alpha \in B$ si pour tous $m$, $n$ et leur image $m'$, $n'$:

$$d(m', n') = \alpha d(m, n)$$

Ainsi une similitude de rapport $\alpha$ est une contraction. Elle transforme tout $\beta$-triplet en un $\alpha\beta$-triplet, tout cercle (resp: disque) de rayon $\rho$ en un cercle (resp: disque) de rayon $\alpha\ .\ \rho$.

Considérons la similitude définie par $m'=wm^2+um+v$. L'image du 1-triplet $a$, $b$, $c$ est un $\alpha$-triplet: on a nécessairement $w=-a'-b'-c'$ (Remarque 14)
d'où $w=0$ (remarque 10)
Alors $u^2\ .\ d(m, n)=d(m', n')$

*Propriété 26 :*

Les similitudes sont les transformations de la forme $m \to um+v$; le rapport est $u^2$.

*Propriété 27 :*

Une similitude $T$ est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par $T$.

En effet:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si $m$ est invariant par la similitude $n \to un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement:

$$\begin{aligned} &(1 - u^2)\, m = (1 - u^2)\, v \\ &\varepsilon_1(u) \cdot v = 0 \\ &\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v \end{aligned}$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u)\,.\,v = 0$, l'ensemble des points $m$ invariants est donné par:

$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))\, v + \varepsilon_1(u) \cdot t\,, \quad t \in A$

c'est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u))v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

*Propriété 28 :*

La similitude $n \to un + v$ a des points invariants ssi $v\,.\,\varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u)).v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

*Remarque 18 :*

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.