Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE PLANE EN CLASSE DE SECONDE
Autor: Fourès, L.
Kapitel: Chapitre II — Le Plan
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44573

légitime dans la mesure où cette addition vérifierait les lois algébriques de l'addition, ce qui n'est pas tout à fait le cas. L'étude de cette « addition » peut néanmoins se justifier dans une classe de Seconde, ne serait-ce que pour mieux mettre en évidence les « bonnes » propriétés de l'addition (de l'opération de groupe en général) en faisant voir par un contre exemple tel que celui-là que ces « bonnes » propriétés ne « vont pas de soi ».

Problème.

Est-ce que, en restreignant au besoin la classe des paramétrisations admissibles, d'autres structures de **R**, par exemple l'addition, peuvent être reportées sur $(D; j)$? Si l'addition de **R** se reporte sur $(D; j)$ on définit:

$$A = B + C \Leftrightarrow j(A) = j(B) + j(C) .$$

Soit alors à déterminer à quelles conditions (sur k) la somme $B + C$ déterminée sur $(D; k)$ est la même que la somme $B + C$ déterminée sur $(D; j)$.

$$\forall B, C \in D , \; j^{-1}\big(j(B) + j(C)\big) = k^{-1}\big(k(B) + k(C)\big)$$

équivalent à:

$$\forall b, c \in \mathbf{R} , \; k \circ j^{-1}(b + c) = k(B) + k(C) = k \circ j^{-1}(b) + k \circ j^{-1}(c) .$$

La condition pour que k et j déterminent la même somme sur D est que $k \circ j^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ conserve l'addition. Cette relation est encore une relation d'équivalence mais n'est pas l'équivalence affine.

A l'intérieur d'une classe affine la relation « $k \circ j^{-1}$ conserve l'addition » définit une classe linéaire.

Chapitre II. — Le Plan

On adopte le même point de vue que dans l'étude de la droite. Nous considérons un plan comme un espace en soi sans espace environnant. Il n'est pas question de « regarder un plan » de l'extérieur, donc de parler de son aspect « plan ou courbe », puisqu'il n'y a aucun repère extérieur pour apprécier ces qualités traditionnelles.

Définition : Un plan est un couple $(P; J)$ formé d'un ensemble et d'une bijection $J : P \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Plan standard : $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}; \mathscr{J})$ ou simplement plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, dans lequel $\mathscr{J} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est l'application identique.

J permet d'une manière générale le report sur P des structures de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ moins familières que celles de $\mathbf{R}$.

Plan affine.

Soient deux plans $(P; J)$, $(P; K)$ déterminés par deux bijections J et K définies sur le même ensemble P.

On dit que J et K définissent sur P la même structure affine $\Leftrightarrow K \circ J^{-1}$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est une fonction affine (forcément non dégénérée):

$$K \circ J^{-1}(x, y) = (ux + vy + w, u'x + v'x + w'), \quad uv' - vu' \neq 0$$

On vérifie que la relation « J et K définissent la même structure affine sur P » est une relation d'équivalence.

Un plan affine est un couple $(P; \mathscr{S})$ formé d'un ensemble et d'une classe de bijections de P dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ affinement équivalentes.

Plan affine standard: $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \mathscr{S}_0)$ où $\mathscr{S}_0$ est la classe des bijections de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sur lui-même affinement équivalentes à l'identité.

Remarque. On pourrait s'intéresser à la structure métrique obtenue par report de la structure métrique de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans lequel la distance de deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) est définie par exemple, par:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Remarquons d'une part, que cette valeur de la distance n'est pas une propriété affine, c'est-à-dire n'est pas invariante par une transformation affine; or nous nous bornons à une étude des structures affines; d'autre part, nous verrons que deux points définissent une droite et la longueur sera définie sur cette droite grâce à une paramétrisation qui sera évidemment liée à la structure du plan; cette longueur ne coïncidera pas avec la distance que l'on aurait définie par le procédé précédent.

Le premier problème qui se pose est celui de la définition des droites du plan. Ici les droites placées dans le plan sont « vues de l'extérieur », elles dépendent de l'espace environnant: le plan.

Droites dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Dans cette partie le plan étudié est le plan standard $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \mathscr{S}_0)$ noté simplement $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Un sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ en bijection avec $\mathbf{R}$ est une droite au sens donné au chapitre premier mais n'est pas en général une « droite du plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ».

Support de droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Un sous-ensemble D de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est un support de droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ s'il est du type suivant:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \exists \text{ une correspondance affine entre } x \text{ et } y \}$$

Il y a une correspondance affine entre x et y s'il existe trois nombres réels α, β, γ tels que $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec la condition: α et β non tous deux nuls.

Projections. On notera $pr_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $pr_1 (x, y) = x$

$pr_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $pr_2 (x, y) = y$

Si $\beta \neq 0$ la restriction de pr_1 à D réalise une bijection j_1 de D sur $\mathbf{R}$;

$$j_1^{-1} (x) = \left(x, - \frac{1}{\beta} (\alpha x + \gamma) \right)$$

Si $\alpha \neq 0$ la restriction de pr_2 à D réalise une bijection j_2 de D sur $\mathbf{R}$;

$$j_2^{-1} (y) = \left(- \frac{1}{\alpha} (\beta y + \gamma), y \right)$$

Dans le cas où j_1 et j_2 sont toutes deux définies ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), j_1 et j_2 sont affinement équivalentes:

$$j_2 \circ j_1^{-1}(x) = j_2 \left(x, - \frac{1}{\beta} (\alpha x + \gamma) \right) = - \frac{1}{\beta} (\alpha x + \gamma)$$

Pour tout support de droite l'une des bijections j_1 ou j_2 est définie et réalise une paramétrisation de D. Les cas exceptionnels correspondent aux supports de droite:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \alpha x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0 \} = \left\{ - \frac{\gamma}{\alpha} \right\} \times \mathbf{R}$$

et

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \beta y + \gamma = 0 \quad \beta \neq 0 \} = \mathbf{R} \times \left\{ - \frac{\gamma}{\beta} \right\}$$

Droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Une droite affine dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est le couple $(D, \mathscr{A})$ formé d'un support de droite D et de la classe $\mathscr{A}$ des bijections de D sur $\mathbf{R}$ affinement équivalentes à j_1 ou j_2. $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \exists$ une correspondance affine entre x et y }. j_1 est la restriction à D de pr_1 ; j_2 est la restriction à D de pr_2.

Il en résulte qu'une droite affine dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est parfaitement déterminée par son support. D'où l'usage qui consiste à utiliser une même notation pour la droite et son support, et même d'appeler droite son ensemble support.

Fonctions de rectification.

On voit alors l'intérêt qu'aurait une fonction définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et dont la restriction à tout support de droite quelconque réaliserait une paramétrisation de la droite correspondante.

pr_1, pr_2 sont deux fonctions de cette espèce avec toutefois la restriction qu'il existe pour chacune de ces fonctions une famille de droites exceptionnelles sur lesquelles la restriction de pr_1 (ou pr_2) est une fonction constante.

Problème : Déterminer une fonction $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dont la restriction à tout support de droite $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, réalise une bijection de D sur $\mathbf{R}$, pouvant paramétrer la droite D.

Soit $D = \{ x_0 \} \times \mathbf{R}$ un support de droite; j_2 réalise une paramétrisation de D donc la restriction $\varphi_{/D}$ de φ à D doit être affinement équivalente à j_2. On doit donc avoir:

$$\varphi (x_0, y) = \varphi \left(j_2^{-1}(y)\right) = \alpha y + \beta$$

dans lequel α et β sont des nombres dépendant de D c'est-à-dire de x_0.

On doit donc écrire:

$$\varphi (x, y) = \alpha (x)\, y + \beta (x)$$

Soit alors $D' = \mathbf{R} \times \{ y_0 \}$ paramétrée par j_1. $\varphi (x, y) = \alpha' (y)\, x + {} + \beta' (y)$.

Si $x = 0 : \forall y \in \mathbf{R},\ \beta'(y) = \alpha (0)\, y + \beta (0)$ et avec $y = 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$, $\alpha'(0)\, x + \beta'(0) = \beta (x)$.

On pose alors $\alpha (0) = a$, $\alpha'(0) = a'$ et en remarquant ($x=0$, $y=0$) $\beta (0) = \beta'(0) = c$, on obtient:

$$\beta' (y) = ay + c \qquad \text{et} \qquad \beta (x) = a'x + c$$

d'où l'on déduit:

$$\forall x, y \quad \varphi (x, y) = \alpha'(y)\, x + ay + c = \alpha (x)\, y + a'x + c$$

d'où

$$\forall x \quad \varphi(x, 1) = \alpha'(1)\, x + a + c = \alpha(x) + a'x + c$$

c'est-à-dire:

$$\alpha(x) = \big(\alpha'(1) - a'\big)\, x + a = bx + a$$

et

$$\forall y \quad \varphi(1, y) = \alpha'(y) + ay + c = \alpha(1)\, y + a' + c$$

c'est-à-dire:

$$\alpha'(y) = \big(\alpha(1) - a\big)\, y + a' = b'y + a'$$

d'où

$$\forall x, y \quad \varphi(x, y) = b'xy + a'x + ay + c = bxy + ay + a'x + c\,,$$

d'où $b = b'$.

Soit alors la droite $D'' = \{\, (x, y) \mid x = y \,\}$,

$\varphi \circ j_1^{-1}(x) = \varphi(x, x) = bx^2 + (a + a')\, x + c$;

or $\varphi \circ j_1^{-1}$ doit être une fonction affine d'où: $b = 0$.

Les seules fonctions φ satisfaisant éventuellement aux conditions du problème sont de la forme:

$$\varphi(x, y) = a'x + ay + c$$

Soit alors $D = \{\, (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0,\ \alpha \text{ et } \beta \text{ non tous deux nuls} \,\}$, une droite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Si

$$\beta \neq 0\,, \text{ on a } \forall x, y \in D\,,\ y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$$

d'où:

$$\varphi \circ j_1^{-1}(x) = \varphi\left(x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)\right) = a'x - \frac{a}{\beta}(\alpha x + \gamma) + c$$

$\varphi \circ j_1^{-1}$ est bien une fonction affine non dégénérée si $a' - \dfrac{a\alpha}{\beta} \neq 0$.

Si $\beta a' - \alpha a = 0$, j_1 n'étant pas dégénérée, c'est que φ restreint à D n'est pas une paramétrisation. Cherchons alors sans utiliser j_1 si la restriction de φ à D réalise une bijection de D sur $\mathbf{R}$.

Soit $u \in \mathbf{R}$, existe-t-il $(x, y) \in D$ tel que $\varphi(x, y) = u$?

On est amené à résoudre le système:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ a'x + ay + c = u \end{cases}$$

qui a une solution unique sauf si $\alpha a = a'\beta$ qui est bien la condition d'exception trouvée précédemment.

D'où il résulte que le problème posé n'a pas de solution.

Proposition 1. $\exists$ une famille de fonctions $\mathscr{X}$, telle que la restriction à toute droite de toute fonction de la famille $\mathscr{X}$ est, ou une constante ou une paramétrisation de cette droite, affinement équivalente à l'une ou l'autre des restrictions des projections.

Les fonctions de la famille $\mathscr{X}$ sont appelées fonctions de rectification. Elles sont de la forme $\varphi(x, y) = a'x + ay + c$.

On doit se poser un problème en quelque sorte inverse. Soit une droite D dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; j une paramétrisation de la droite affine D (donc $j \circ j_1^{-1}$ (ou $j \circ j_2^{-1}$) est affine). Est-ce que j est la restriction à D d'une fonction de rectification de la famille $\mathscr{X}$?

Supposons $D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \ \ \beta \neq 0 \}$ d'où $j \circ j_1^{-1} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est affine.

Or $j_1^{-1}(x) = \left(x, -\dfrac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right)$ et $j \circ j_1^{-1}(x) = ux + v$ $(u, v \in \mathbf{R})$.

Si j est la restriction à D de φ où $\varphi(x, y) = a'x + ay + c$, on doit avoir:

$$ux + v = \varphi\left(x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right) = a'x - \frac{a}{\beta}(\alpha x + \gamma) + c$$

d'où: $\begin{cases} u = a' - \dfrac{a\alpha}{\beta} \\ v = c - \dfrac{a\gamma}{\beta} \end{cases}$ ou encore: $\begin{cases} \beta a' - \alpha a = \beta u \\ \beta c - \gamma a = \beta v \end{cases}$

qui permettent de calculer a, a', c mais sans unicité de la solution (a peut être choisi arbitrairement).

Toutes les paramétrisations admissibles pour une droite D s'obtiennent comme restrictions de fonctions de rectification.

Deux types de problèmes.

On se trouvera confronté à deux types de problèmes:

1. Ceux qui seront exclusivement posés en termes de support. Détermination d'un support de droite contenant deux points donnés. Intersection de deux droites.
2. Ceux dans lesquels les paramétrisations des droites interviennent. Il peut arriver que les résultats obtenus ne requièrent pas de précision sur les paramétrisations (th. de Thalès ci-dessous) mais il peut arriver que les résultats quoiqu'exprimant des propriétés affines nécessitent une certaine « unité » dans les paramétrisations (th. des tubes de parallèles).

Détermination d'un support de droite contenant deux points.

Soient dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ les points $A : (x_1, y_1)$, $B : (x_2, y_2)$.
Si A et $B \in D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$ on doit avoir:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0 \end{cases}$$

système homogène de deux équations à trois inconnues donc qui a toujours au moins une solution.

Si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, toutes les solutions se déduisent de l'une d'entre elles $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ par multiplication par une constante quelconque. Comme par ailleurs $\lambda\alpha_0 x + \lambda\beta_0 y + \lambda\gamma_0 = 0$ et $\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 = 0$ définissent le même support de droite il y a donc une droite unique dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ contenant A et B.

* Remarquer que dans une classe de seconde il est préférable de séparer les cas $x_1 = x_2$ et $x_1 \neq x_2$, en écrivant la relation de définition du support de D sous la forme $y = \alpha' x + \beta'$.

* L'unicité peut aussi résulter de l'étude suivante sur l'intersection de deux droites.

Intersection de deux droites.

Soient
$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$ et $D' = \{ (x, y) \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \}$ deux droites de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Soit à déterminer $(x, y) \in D \cap D'$. Si (x, y) existe $(x, y) \in D \cap D'$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 , \end{cases}$$

système de deux équations non homogènes à deux inconnues.

Le système a une solution unique sauf si $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$. Si dans ce dernier cas $\alpha\gamma' - \gamma\alpha' \neq 0$, le système n'a pas de solution. Si $\alpha\beta' = \beta\alpha'$ et $\alpha\gamma' = \gamma\alpha'$, tout couple (x, y) vérifiant l'une des relations vérifie l'autre, c'est-à-dire $D = D'$.

Théorème 2. Deux droites distinctes ont une intersection soit vide soit constituée par un seul point.

Corollaire : Deux droites distinctes ne pouvant avoir plus d'un point commun, deux droites qui ont plus d'un point commun ne sont pas distinctes.

Le problème d'unicité posé par la détermination d'une droite contenant deux points donnés, se trouve résolu: deux points distincts déterminent une droite unique qui les contient.

Expression résolue : Si $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$ le point d'intersection des deux droites D et D' est:

$$\left(\frac{-\gamma\beta' + \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} , \frac{-\gamma'\alpha + \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

Droites parallèles.

On dit que deux droites distinctes qui ont une intersection vide sont parallèles. Deux droites déterminées par $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ d'une part, et $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ d'autre part, sont parallèles $\Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$ (on est conduit à considérer qu'une droite est parallèle à elle-même).

La relation pour deux droites d'être parallèles est une relation d'équivalence toujours en considérant qu'une droite est parallèle à elle-même:

Soient

$$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \} , \quad D^1 = \{ (x, y) \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \} ,$$

et

$$D'' = \{ (x, y) \mid \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' = 0 \} .$$

D parallèle à $D' \Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$ d'où D' est parallèle à D, et D parallèle à D.

Si D parallèle à D' et D' parallèle à D'' on a: $\alpha\beta' = \alpha'\beta$ et $\alpha'\beta'' = \alpha''\beta'$; l'un des nombres α' ou β' est $\neq 0$; si $\alpha' \neq 0$, on a $\alpha\,\alpha'\beta'' = \alpha\,\alpha''\beta' =$

$= \alpha''\alpha'\beta$, d'où $\alpha\beta'' = \alpha''\beta$; si $\alpha' = 0$ d'où $\beta' \neq 0$, $\alpha\beta' = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $\alpha''\beta' = 0$ d'où $\alpha'' = 0$ et $\alpha\beta'' = \alpha''\beta$.

Théorème 3. Soit $D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$ une droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. $\Rightarrow \exists$ une droite unique D' parallèle à D avec $(x_0, y_0) \in D'$.

Si une telle droite $D' = \{ (x, y) \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \}$ existe, on doit avoir:

$$\begin{cases} \alpha'\beta - \beta'\alpha = 0 \\ \alpha' x_0 + \beta' y_0 = -\gamma' \end{cases}$$

qui a pour solution $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = -\alpha x_0 - \beta y_0$.

L'unicité résulte du fait suivant: s'il existe D'' parallèle à D avec $(x_0, y_0) \in D''$, on aurait D' et D'' parallèles qui auraient un point commun, ce qui a lieu $\Leftrightarrow D' = D''$.

Direction de droite.

Une direction de droite est une classe d'équivalence de droites parallèles.

Deux droites

$$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \} \quad \text{et} \quad D' = \{ (x, y) \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \}$$

appartiennent à la même direction

$$\Leftrightarrow \exists\, k \neq 0 \text{ tel que } \alpha' = k\alpha \text{ et } \beta' = k\beta$$

de sorte que

$$D' = \left\{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \frac{1}{k} \gamma' = 0 \right\}.$$

Théorème de Thalès.

Théorème 4. Soient D_1, D_2, D_3 trois droites parallèles, A_1, A_2, A_3 leurs points d'intersection respectifs avec une droite Δ.

Le rapport (sur Δ) $\dfrac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}}$ ne dépend pas de la droite Δ.

Remarquons que le rapport des mesures algébriques de deux segments orientés sur une même droite ne dépend pas de la paramétrisation de cette droite, dans une même classe affine de paramétrisations (proposition 2.1. Droite).

Dans ces conditions le rapport $\dfrac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}$ peut être évalué soit avec j_1 soit avec j_2. Etant donnés les rôles symétriques joués par j_1 et j_2 on peut supposer que Δ est paramétrée par j_1. En se référant à l'expression résolue du point d'intersection de deux droites avec:

$$\Delta = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \} \qquad (\beta \neq 0)$$

et

$$D_i = \{ (x, y) \mid ax + by + c_i = 0 \} \qquad (i=1, 2, 3)$$

(voir droites $\in$ une même direction),
on obtient

$$A_i = (x_{A_i}, y_{A_i}) \qquad \text{avec} \qquad x_{A_i} = \frac{-\gamma b + c_i\beta}{\alpha b - \beta a}$$

Remarquer que D_i coupant effectivement Δ on a $\alpha b - \beta a \neq 0$; on a supposé $\beta \neq 0$ de sorte que l'on peut poser $u = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ $v = -\dfrac{\gamma}{\beta}$,

d'où

$$x_{A_i} = -\frac{vb + c_i}{ub + a}$$

d'où

$$x_{A_3} - x_{A_1} = \frac{C_3 - C_1}{ub + a}$$

d'où

$$\frac{\overline{A}_1\overline{A}_3}{\overline{A}_1\overline{A}_2} = \frac{C_3 - C_1}{C_2 - C_1} \text{ indépendant de la droite } \Delta$$

Théorème des tubes de parallèles.

Théorème 5. Soient dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ deux paires de droites parallèles $\{ D_1, D_2 \}$ d'une part, $\{ \Delta, \Delta' \}$ d'autre part. D_1 et D_2 étant paramétrées par les restrictions d'une même fonction de rectification, les mesures algébriques des segments découpés par Δ et Δ' sur D_1 et D_2 sont égales.

Soient

$$A_1 = D_1 \cap \Delta\,, \; A_1' = D_1 \cap \Delta'\,, \; A_2 = D_2 \cap \Delta\,, \; A_2' = D_2 \cap \Delta'\,.$$

Soient

$$D_i = \{ (x, y) \mid ax + by + c_i = 0 \} \quad i = 1, 2 .$$

$$\Delta = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \} ,$$

$$\Delta' = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma' = 0 \} ,$$

et soit $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction de rectification $\varphi (x, y) = ux + vy + w$.

Il faut donc vérifier: $\varphi (A_1') - \varphi (A_1) = \varphi (A_2') - \varphi (A_2)$.

$$x_{A_1} = \frac{- \gamma b + c_1 \beta}{\alpha b - a\beta} \qquad y_{A_1} = \frac{- c_1 \alpha + \gamma a}{\alpha b - a\beta}$$

$$x_{A_1'} = \frac{- \gamma' b + c_1 \beta}{\alpha b - a\beta} \qquad y_{A_1'} = \frac{- c_1 \alpha + \gamma' a}{\alpha b - a\beta}$$

$$\varphi (A_1') - \varphi (A_1) = \frac{ub\,(\gamma - \gamma')}{\alpha b - a\beta} + \frac{va\,(\gamma' - \gamma)}{\alpha b - a\beta} = \frac{ub + va}{\alpha b - a\beta}(\gamma' - \gamma)$$

Cette expression étant indépendante de c_1 est évidemment la même pour $\varphi (A_2') - \varphi (A_2)$ d'où le théorème.

Conséquences.

1. *Graphique d'un point.*

Soient dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ les deux droites $\{ 0 \} \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \times \{ 0 \}$ que l'on appelle axes de références. Le point $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est l'intersection des deux droites $\{ x_0 \} \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \times \{ y_0 \}$ respectivement parallèles aux axes de références. Il résulte du théorème des tubes de parallèles que:

$$j_1 (x_0, y_0) - j_1 (0, y_0) = j_1 (x_0, 0) - j_1 (0, 0) = x_0$$

et cette propriété est fondamentale dans les représentations graphiques.

2. Théorème 6. Dans un triangle ABC toute parallèle au côté BC passant par le milieu de AB coupe AC en son milieu.

On peut démontrer ce théorème soit en utilisant le théorème des tubes de parallèles, soit le théorème de Thalès en faisant passer par A la parallèle au côté BC.

3. *Le parallélogramme.*

On appelle parallélogramme l'ensemble formé par deux paires de droites parallèles (et non toutes parallèles) et leurs quatre points d'intersection appelés sommets. Les diagonales sont les droites joignant deux sommets non situés sur une même droite formant le parallélogramme.

Théorème 7. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en un point qui est sur chacune d'elles le milieu du segment déterminé par les sommets.

Construisons la parallèle à la diagonale A_1A_2' passant par A_2. D'après le théorème des tubes de parallèles cette droite coupe Δ' en A_3' et (sous réserve d'utiliser une même fonction de rectification dont les restrictions à Δ et Δ' sont j et j'), $\overline{A_2'A_3'} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_1'A_2'}$.

A_2' est donc le milieu de $A_1'A_3'$, et le théorème 6 appliqué au triangle $A_1'A_2A_3'$ montre que A_1A_2' coupe $A_1'A_2$ en son milieu.

4. *Projection du plan sur une droite parallèlement à une direction de droite.*

Soit Δ une droite du plan et $\mathscr{D}$ une direction de droite. Soit $A \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et $D_A \in \mathscr{D}$ telle que $A \in D_A$. $\Delta \cap D_A$ est un point appelé projection de A sur Δ parallélement à $\mathscr{D}$.

Remarquer que la projection sur Δ parallèlement à $\mathscr{D}$, restreinte à une droite Δ' conserve les rapports des mesures algébriques des segments (th. de Thalès).

Le plan standard affine

Soit $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \mathscr{S}_0)$ le plan standard affine et $J \in \mathscr{S}_0$
$J : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, J affinement équivalent à l'identité. D'où:

$$J(x, y) = (\alpha x+\beta y+\gamma,\ \alpha' x+\beta' y+\gamma')\,, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0\,.$$

A priori deux familles de supports de droite peuvent être définies sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

1) La famille $\mathscr{D} = \{ D = \{ (x, y) \mid \exists$ une correspondance affine entre x et $y \} \}$

2) La famille des images inverses par J^{-1} des droites de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire les supports de droites obtenus sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par report de la famille des droites de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
$\mathscr{D}' = \{ D' = \{ (x, y) \mid \exists$ une correspondance affine entre $\alpha x + \beta y + \gamma$ et $\alpha' x + \beta' y + \gamma' \} \}$.

Proposition 8. $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$.

Une correspondance affine entre $\alpha x + \beta y + \gamma$ et $\alpha' x + \beta' y + \gamma'$ est une correspondance affine entre x et y d'où $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$.

Inversement soit $D \in \mathscr{D}$; $D = \{ (x, y) \mid ux + vy + w = 0 \}$; existe-t-il u', v', w' tels que:

$$\forall x, y \quad u' (\alpha x + \beta y + \gamma) + v' (\alpha' x + \beta' y + \gamma') + w' = ux + vy + w \, ?$$

u', v', w' doivent vérifier:

$$\begin{cases} \alpha u' + \alpha' v' = u \\ \beta u' + \beta' v' = v \\ \gamma u' + \gamma' v' + w' = w \end{cases}$$

Ce système a une solution d'ailleurs unique sous la condition $\alpha\beta' - \beta\alpha' = = 0$ qui est réalisée.

u', v', w' ainsi calculés établissent $D \in \mathscr{D}'$ c'est-à-dire $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$.

Les fonctions de rectification de la famille $\mathscr{D}'$ sont les fonctions $\{ \varphi \circ J \}$ où φ parcourt la famille des fonctions de rectification de la famille $\mathscr{D}$, or $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ d'où il résulte que la famille des $\varphi \circ J$ est la famille des fonctions φ.

Le Plan ($\mathscr{P}$; J)

Soit $\mathscr{P}$ un ensemble et J une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Support de droite dans ($\mathscr{P}$, J).

Δ est un support de droite dans $\mathscr{P} \Leftrightarrow J(\Delta)$ est un support de droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Soit K affinement équivalent à J; $K \circ J^{-1} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est affine (non dégénérée) $K(\Delta) = K \circ J^{-1} (J(\Delta))$. $J(\Delta)$ est un support de droite dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $K \circ J^{-1}$ est affine, il résulte du paragraphe précédent que $K(\Delta)$ est un support de droite $\Leftrightarrow J(\Delta)$ est un support de droite.

Les droites sont donc définies dans ($\mathscr{P}$, $\mathscr{S}$) où $\mathscr{S}$ est une classe de bijections affinement équivalentes de $\mathscr{P}$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Les fonctions de rectification de ($\mathscr{P}$, $\mathscr{S}$) sont les fonctions $\varphi \circ J$ (où φ parcourt la famille Φ des fonctions de rectification de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$). Cette définition ne dépend pas de J dans $\mathscr{S}$: soit $K \in \mathscr{S}$ $\varphi \circ K = \varphi \circ K \circ J^{-1} \circ J$ où $\varphi \circ (K \circ J^{-1})$ parcourt Φ lorsque φ parcourt Φ.

Toutes les propriétés affines définies dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (définition des droites parallèles, théorème de Thalès, théorème des tubes de parallèles, parallélogramme, etc.) se reportent sans modification sur $\mathscr{P}$.

Une généralisation

Si au lieu de $\mathbf{R}$ on utilise un corps $\mathbf{R}$ ordonné d'une manière compatible avec la structure de corps il est possible de répéter mot pour mot la théorie qui a été faite au cours de ces deux chapitres et d'élaborer ainsi une géométrie affine sur un corps autre que $\mathbf{R}$.

(Reçu le 6 novembre 1970)

L. Fourès
700 Immeuble Le Corbusier
Boulevard Michelet
13 - Marseille (France)