Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: Chapitre XI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44571

l'occasion de rappeler que cette existence fut mise en doute dès la querelle des cordes vibrantes et qu'on avait alors considéré des fonctions n'ayant pas partout des dérivées; de même Cauchy savait bien que la fonction qu'il notait $+\sqrt{x^2}$ n'avait pas de dérivée pour $x = 0$. Ce qui est vrai, c'est qu'on a cru pendant longtemps qu'une fonction avait en général une dérivée; parmi les très nombreuses démonstrations qui ont été proposées pour le prouver je citerai celles d'Ampère, de Duhamel, de Gallois, de Bertrand, de Gilbert, intéressantes soit par le nom de l'auteur, soit par la méthode employée.

La croyance à l'existence d'une dérivée n'était pas sans fondement analytique; il faut chercher longtemps pour trouver une *expression de calcul* qui n'ait pas en général une dérivée, et pour presque tous les mathématiciens d'il y a cinquante ans une fonction était une expression de calcul. Aussi le raisonnement par lequel Lagrange prétendait démontrer que toute fonction est développable en série de Taylor, raisonnement qu'il ne faudrait peut-être pas abandonner autant qu'on l'a fait depuis Cauchy, constitue-t-il l'une des meilleures démonstrations de l'existence de la dérivée, parce qu'il s'appuie sur ce fait qu'il s'agit d'une expression de calcul. Au même point de vue toute preuve de la possibilité de dériver une expression de calcul est une démonstration de l'existence des dérivées et comme le passage à la limite est la seule opération qui soulève vraiment des difficultés, les théorèmes sur la dérivation terme à terme des séries, dont je parlerai un peu, bien peu, dans la suite, sont des théorèmes sur l'existence de la dérivée.

Chapitre XI

Riemann a indiqué dans son enseignement, comme conséquence de ses considérations sur l'intégration, l'existence de fonctions continues pour lesquelles, dans tout intervalle, il y a des points où la dérivée n'existe pas.

Mais ces points sont encore exceptionnels car ce sont les points de discontinuité d'une fonction intégrable. M. Weierstrass fit connaître le premier exemple de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point; depuis, les exemples de telles fonctions ont été multipliés.

Doit-on renoncer à l'emploi si commode de la dérivée dans l'étude des fonctions continues les plus générales ? P. Du Bois Reymond et M. Dini ne le pensèrent pas et ils définirent quatre nombres, les nombres dérivés ou les extrêmes oscillatoires de la fonction, qui peuvent dans bien des cas remplacer la dérivée.

Ces nombres sont les plus grandes et plus petites limites du rapport incrémentiel quand on fait tendre l'accroissement de la variable vers O positivement et négativement; la signification géométrique de ces nombres est évidente. MM. Dini, Scheeffer, puis M. Volterra ont montré que la connaissance de l'un de ces nombres dérivés suffit pour déterminer la fonction tout comme lorsqu'il s'agit de la dérivée ordinaire; mais une restriction est nécessaire au raisonnement, il faut que les nombres dérivés soient bornés. M. Hans Hahn vient de montrer tout récemment que cette restriction est nécessaire aussi pour l'exactitude du résultat, même s'il s'agit de la dérivée ordinaire, car M. Hahn a construit deux fonctions ayant partout la même dérivée (égale en certains points à $+ \infty$) et dont la différence n'est pas constante.

En supposant que les nombres dérivés soient bornés et intégrables au sens de Riemann, on peut remonter par l'intégration d'un nombre dérivé à la fonction primitive. Mais c'est une restriction supplémentaire que de supposer les nombres dérivés intégrables au sens de Riemann, car M. Volterra a construit une fonction continue dérivable dont la dérivée est bornée et n'est pas intégrable.

Pour la recherche des fonctions primitives, une généralisation de l'intégrale, plus large que celle de Riemann, était donc nécessaire. L'intégration des fonctions sommables permet toujours de remonter d'une dérivée bornée ou d'un nombre dérivé borné à la fonction primitive; mais elle ne le permet pas toujours pour les fonctions non bornées. Ainsi, *on ne sait pas encore remonter dans tous les cas d'une dérivée à la fonction primitive.* [1])

Chapitre XII

Voici maintenant des résultats relatifs à l'existence de la dérivée ordinaire.

On sait que Dirichlet a distingué parmi les fonctions continues, celles qui n'ont qu'on nombre fini de maxima et de minima. Une remarque très

[1]) Les travaux de M. Arnaud Denjoy ont apporté à cette question une réponse définitive et ses méthodes, basées sur une synthèse de l'intégrale de Lebesgue et des propriétés descriptives des fonctions découvertes par R. Baire ont trouvé de nombreuses applications à d'autres questions, en analyse et en géométrie. (Voir plus loin l'application aux séries trigonométriques.). Son « Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse », paru de 1915 à 1917 en plusieurs parties dans divers périodiques, a été republié sous forme de livre en 1954 (Gauthier-Villars). G. C.