encore réunies dans une méthode unique; c'est dire qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette direction. Les difficultés que l'on rencontre n'étant pas sans analogie avec celles qui s'opposaient à la sommation des séries divergentes, il est permis d'espérer que les progrès faits récemment dans ce dernier ordre d'idées pourront servir à étendre encore la portée de l'intégration.

Chapitre VI

On pourrait se demander si, à côté des généralisations de l'intégrale que je viens d'examiner, ne pourraient pas s'édifier d'autres généralisations tout aussi naturelles et tout aussi utiles. Il serait imprudent de déclarer cela impossible, mais c'est peu vraisemblable.

Plaçons-nous d'abord à un point de vue purement analytique. L'intégrale est un nombre attaché à la fonction intégrée f et à l'intervalle d'intégration (a, b); pour que ce nombre puisse servir, il faut, de toute nécessité, qu'il satisfasse à certaines conditions simples telles que la suivante: l'intégrale de $f + \varphi$ dans (a, b) doit être la somme des intégrales de f et de φ dans (a, b). Or, il suffit d'énoncer six conditions, présentant toutes, sauf une, les caractères de simplicité et de nécessité de celle que je viens d'indiquer, pour que l'intégrale des fonctions sommables soit entièrement déterminée.

En examinant les choses du point de vue géométrique, on est conduit aussi à avoir pleine confiance, je crois, dans les généralisations de l'intégrale. On sait les rapports entre les notions d'intégrale et d'aire; à mesure que se précisait la notion d'intégrale, celle d'aire se précisait aussi.

Les recherches sur la motion d'aire, les recherches de Riemann et de P. du Bois Reymond sur les conditions d'intégralité, les recherches de MM. Cantor, Peano, Jordan et Borel sur les ensembles de points et les recherches sur les intégrales multiples, que je laisse de côté ainsi que celles sur l'intégration et la différenciation sous le signe $\int$ et celles sur l'intégration par parties, toutes ces recherches conduisent naturellement à une généralisation des notions de longueur, d'aire et de volume, qui est la notion de mesure d'un ensemble.

On sait maintenant attacher une mesure à presque tout ensemble. Du moins on ne connaît aucun ensemble auquel ne s'applique pas les procédés de mesure. Et la mesure définie par ces procédés est la seule qui satisfasse à la fois à ces deux conditions:

1) La mesure de deux ensembles égaux est la même,

2) Si l'on forme un ensemble par la réunion d'autres n'ayant pas de points communs, deux à deux, la mesure de l'ensemble somme est la somme des mesures; c'est-à-dire le caractère de nécessité qu'à la définition actuelle de la mesure.

Or, dans le cas des fonctions sommables quelconques l'intégrale est la mesure d'un ensemble de points attaché à la fonction et qui est la généralisation immédiate de l'ensemble des points du domaine dont il faut prendre l'aire pour avoir l'intégrale quand la fonction à intégrer est continue. Notons encore que, de ce point de vue géométrique, le cas particulier simple des fonctions intégrables au sens de Riemann se différencie nettement du cas général et que les intégrales par excès et par défaut de M. Darboux correspondent exactement aux étendues extérieures et intérieures, définies par MM. Jordan et Peano de l'ensemble associé à la fonction. J'ajoute que l'intégrale des fonctions sommables se construit à partir des mesures linéaires de certains ensembles comme l'intégrale des fonctions continues se construit à partir des longueurs des segments auxquels se réduisent ces ensembles dans ce cas particulier.

Chapitre VII

De ces travaux relatifs à la fois à l'intégration et aux notions de longueur d'aire et de volume, on peut rapprocher les recherches concernant les longueurs des courbes et les aires des surfaces. Les géomètres anciens prenaient les plus grandes précautions dans l'étude de ces longueurs et de ces aires; à vrai dire ils ne les définissaient pas, mais ils énonçaient avant les démonstrations toute une suite si précise d'axiomes et de principes que cela équivaut à la définition la plus minutieuse. C'est ainsi que M. Peano a pu rétablir les définitions adoptées par Archimède: la longueur (ou l'aire) d'une courbe (ou surface) convexe est la limite inférieure de la longueur (ou de l'aire) des lignes polygonales (ou surfaces polyédrales) circonscrites et la limite supérieure des inscrites. On avait perdu l'habitude de procéder avec précautions dans ces questions délicates surtout dans les livres d'enseignement, de sorte que, à l'époque où j'étais au collège, on démontrait victorieusement que $\pi = 2$.

Le procédé était des plus simples. La longueur de la circonférence de rayon R est $2\pi R$, π restant à déterminer. Ceci posé, soit une demi-circonférence de diamètre AB de centre O et de rayon R. Sa longueur πR est aussi celle de la courbe formée par les deux demi-circonférences de dia-