Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: Chapitre II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44571

Ce qui était important dans les études algébriques et géométriques, c'était la relation analytique entre x et y, d'où cette définition qu'adopte Lagrange, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*:

On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque.

Chapitre II

C'est à la physique que les mathématiques sont redevables de la notion générale de fonction; de l'idée de « Loi physique » dérive celle de fonction.

Que contient une loi physique ? D'abord une partie en quelque sorte qualitative: telles et telles conditions influent seules sur tel fait; puis une partie quantitative: l'énoncé précis de la correspondance entre le fait étudié et les circonstances qui influent sur lui.

La longueur d'une barre de fer à 0° et sa température actuelle sont les seules conditions qui influent sur sa longueur actuelle. Voici une loi physique réduite à sa partie quantitative. Il est certain que cette loi est inexacte; il est douteux même, tout influant vraisemblablement sur tout, qu'on puisse citer aucune loi dans laquelle, seules, des conditions en nombre fini interviennent; mais tout cela importe peu, il a suffi qu'on ait eu, à tort ou à raison, l'idée de lois physiques de la nature de celle que j'examine pour qu'on ait eu du même coup l'idée de fonction. La loi de dilatation indiquée plus haut, en langage mathématique moderne, s'énoncerait ainsi: la longueur actuelle d'une barre de fer est fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0°. Ici les idées de loi et de fonction se confondent, de même toute loi physique relative à des faits et conditions précisables en nombre conduit à une fonction.

Donner la partie quantitative de la loi de dilatation des barres de fer, ce serait dire à quelle fonction de sa température actuelle et de sa longueur à 0° est égale la longueur actuelle d'une barre de fer.

Il faut bien remarquer que rien ne nous permet d'affirmer avant expériences que cette fonction va s'exprimer à l'aide des signes de l'analyse; en d'autres termes, rien ne nous permet de dire à l'avance si cette fonction est ou non une de ces expressions de calcul dont parle Lagrange.

Le calcul des fluxions, dans lequel Newton considère les quantités comme engendrées par un accroissement continuel à la manière de l'espace que décrit un objet en mouvement, c'est-à-dire dans lequel Newton guidé sans doute par ses recherches physiques qui ont tant contribué à la formation de l'idée de « Loi », fait intervenir la notion de correspondance établie physiquement, peut donc avoir une tout autre portée que le calcul des fonctions analytiques de Lagrange. Et quand même ces deux calculs auraient la même portée, il y aurait entre eux une différence analogue à celle qui distingue les deux modes d'exposition de la théorie des fonctions de variable complexe faite, soit d'après les vues de Riemann, soit d'après celles de Weierstrass et de M. Méray.

Chapitre III

En définissant les fonctions par l'idée de correspondance et non à l'aide d'expressions analytiques, Newton accomplissait un grand progrès mais en pratique, comme Leibnitz et tous ses contemporains, il ne s'occupe que des fonctions ayant une expression analytique simple. On ne conçoit guère d'ailleurs comment il aurait pu en être autrement. Newton réussissait à résumer tous les phénomènes astronomiques dans une seule loi et cette loi, malgré sa généralité, s'exprimait aussi simplement que possible à l'aide des symboles algébriques; un tel succès faisait naturellement penser qu'il était inutile de recourir à des fonctions compliquées pour l'explication des phénomènes naturels et en tous cas on était assuré qu'il y avait encore beaucoup à tirer de l'emploi des expressions analytiques simples.

Si la rigueur avait été de mode à cette époque comme de nos jours, la question de la possibilité d'exprimer analytiquement les fonctions définies physiquement se serait posée à chaque instant. Il était impossible, par exemple, de résoudre le problème de la brachystochrone sans supposer que la courbe à trouver existait et possédait certains éléments, tangente, rayon de courbure, etc., dont on savait démontrer l'existence pour les courbes à définition analytique, mais pour ces courbes seules.

Fort heureusement, les Bernouilli, Leibnitz, Newton, l'Hospital, ne se laissèrent pas arrêter par cette difficulté préjudicielle et il faut attendre jusqu'à D'Alembert et Lagrange pour que la question soit posée nettement à l'occasion du problème des cordes vibrantes [1]).

---

[1]) La discussion qui s'éleva à l'occasion de ce problème est intéressante à bien des égards. Cependant, comme les contradicteurs s'opposèrent pendant longtemps les mêmes arguments sans en apporter de nouveaux, la lecture des mémoires originaux est un peu fastidieuse. On aura une idée très suffisante de cette importante discussion, en lisant l'un des nombreux résumés qui en ont été faits, et en particulier celui qui constitue le premier paragraphe de l'historique que Riemann a mis au début de son célèbre mémoire sur les séries trigonométriques. Ce paragraphe est d'ailleurs presque tout entier emprunté au chapitre II de la première section du premier mémoire de Lagrange sur la propagation du son (Œuvres, tome 1er).