

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES
Autor: Lesieur, L.
Kapitel: 6. Les (k, r) plans combinatoires à v éléments, $v < 20$.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43861>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Propriété 5. k divise $r(r-1)$ donc $h(h-1)$ (4)

$$\text{En effet } kb = vr = r + (k-1)r^2 = kr^2 - r(r-1)$$

Propriété 6. $k(k-1)$ divise $v(v-1)$ (5)

$$\text{Cela résulte de } v(v-1) = v(k-1)r = k(k-1)b.$$

En vue d'étudier les (k, r) plans combinatoires à v éléments, v donné, on peut remarquer qu'il existe toujours la solution :

$$k = 2, r = v - 1.$$

qui est la solution triviale d'un ensemble à v éléments dont les droites sont constituées par les sous-ensembles à deux éléments. Cette solution est représentée par exemple par v points en position générale dans le plan. Nous l'écartérons des solutions explicites que nous allons maintenant donner pour le cas $v \leq 20$. A titre d'exemple, on peut vérifier que les 4 possibilités trouvées au § 3 pour les plans combinatoires à 5 éléments ne donnent qu'un (k, r) -plan, le dernier cas, qui correspond précisément à $k = 2, r = 4$.

6. Les (k, r) plans combinatoires à v éléments, $v < 20$.

Indiquons sur le cas $v = 13$ le procédé de recherche des conditions nécessaires.

On utilise les conditions nécessaires $v - 1 = (k-1)r, r \geq k, k \mid r(r-1)$; on a donc: $v - 1 = 12 = 3 \times 2 \times 2$ d'où les possibilités:

$$k - 1 = 1, r = 12 \text{ c'est-à-dire } k = 2, r = 12 \text{ (solution triviale)}$$

$$k - 1 = 2, k = 3, r = 6 \text{ qui vérifie bien } k \mid r(r-1).$$

$$k - 1 = 3, k = 4, r = 4 \text{ qui donne le plan projectif d'ordre 3.}$$

$$k - 1 = 4, k = 5, r = 3 \text{ est impossible } (r \geq k).$$

En procédant de même pour tous les nombres $v < 20$ et en écartant les solutions triviales et celles qui correspondent aux plans projectifs ou aux plans affines, il reste les trois cas suivants à étudier pour lesquels le problème d'existence se pose.

$$1^{\text{er}} \text{ cas. } v = 13, k = 3, r = 6.$$

En numérotant les points $0, 1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5', 6, 6'$ on peut obtenir, après quelques tâtonnements, une solution avec les 26 droites suivantes:

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' }	6 droites	123 } 143' } 152' } 164' } 15' 6' }	5 droites	1' 2 3' } 1 2' 6 } 1' 4 5' } 1' 5 6' } 1' 4' 3 }	5 droites	24 6' } 24' 5 } 26 5' }	3 droites	453 } 462' }	2
						3' 65 } 3' 2' 5' } 3' 4' 6' }	3 droites	5' 34' } 6' 2' 3' }	1 1

Chaque droite contient 3 points et par tout point il passe 6 droites. Le nombre d'Euclide est $h = 3$.

On peut obtenir une solution algébrique de ce problème (voir en Appendice).

2^e cas. $v = 15, k = 3, r = 7$

Une solution peut être obtenue ici en appliquant une méthode générale (cf. [2], page 29) à partir d'un espace projectif de dimension 3 sur le corps fini F_2 à 2 éléments. Les points sont ceux de l'espace, les droites sont celles de l'espace. La structure est alors celle d'un (k, r) -plan combinatoire. Numérotions les points comme l'indique la figure 8.

Les 35 droites correspondent aux parties suivantes :

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' } 077' }	7 dr	142' } 124' } 136' } 157' } 163' } 175' }	6 dr	235' } 241' } 253' } 267' } 276' }	5 dr	347' } 352' } 361' } 374' }	4 dr	456' } 465' } 473' }	3 dr
		564' } 571' }	2 dr	1' 2' 4' } 1' 3' 6' } 1' 5' 7' }	3 dr	3' 4' 7' }	1 dr		
		672' }	1 dr			4' 5' 6' }	1 dr		
				2' 3' 5' } 2' 6' 7' }	2 dr				

3^e cas. $v = 19, k = 3, r = 9$

Une solution peut être obtenue par un système de Netto, [2] p. 98, par la méthode suivante :

On part du corps F_{19} à 19 éléments. C'est l'ensemble S . Le groupe multiplicatif Γ des carrés non nuls possède 9 éléments qui sont :

$$\Gamma = \{1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5\}$$

$$2^2 \ 3^2 \ 4^2 \ 5^2 \ 6^2 \ 7^2 \ 8^2 \ 9^2$$

Il existe un sous-groupe multiplicatif G de Γ qui est formé des 3 éléments :

$$G = \{1, 11, 7\}$$

Alors, les triples alignés sont les transformés de G par les transformations du groupe Φ à 19×9 éléments :

$$x \rightarrow x\alpha + a \quad \alpha \in \Gamma, a \in F_q$$

Comme une même droite peut être obtenue à partir de 3 transformations différentes il existe $b = \frac{19 \times 9}{3} = 57$ droites. On a $vr = kb$, d'où

$$r = 3 \times 19 \times 3 \times \frac{1}{19} = 9 \text{ ce qui donne bien les paramètres } k = 3, r = 9$$

du cas $v = 19$.

On remarquera que les 3 cas à étudier correspondent tous à $k = 3$, c'est-à-dire à des *systèmes de triplets* de Steiner, ([2], p. 97). Or le problème d'existence des solutions est résolu dans ce cas depuis longtemps (Kirkman, 1847, Netto [8], 1893) par la condition nécessaire

$$k \{k-1\} = 6 \text{ divise } v(v-1) = 19 \times 18 \text{ (propriété 6)}$$

Beaucoup plus récemment, Hanani [6], 1965, a démontré que cette condition est suffisante pour $k \leq 5$. Le problème est ouvert pour les valeurs supérieures de k . On trouvera des indications sur les résultats connus dans [4].

Appendice (Netto [8] p. 145) $v = 6 \times 2 + 1$ premier :

Une solution du 1^{er} cas : $v = 13, k = 3, r = 6$.

On considère une racine primitive mod 13, par exemple :

$g = 2$ dont les puissances sont :

$$1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7$$

$$1, g \ g^2 \ g^3 \ g^4 \ g^5 \ g^6 \ g^7 \ g^8 \ g^9 \ g^{10} \ g^{11}$$

On forme les triples:

$$(1) \quad (0, 1, 4), (028) \\ (0, g^0, g^2), (0, g^1, g^3)$$

et 12 autres à partir de ceux-là:

$$(2) \quad (\chi, \chi+g^\alpha, \chi+g^{2\alpha}) \quad (\chi = 1, 2, 3, \dots, 12)$$

$$\text{ou} \quad (\chi, \chi+1, \chi+4) \quad (\chi, \chi+2, \chi+8) \quad \chi = 0, 1, \dots, 12$$

On obtient alors les $13 \times 2 = 26$ triples cherchés qui sont donc explicitement:

(0, 1, 4)	(0, 2, 8)
(1, 2, 5)	(1, 3, 9)
(2, 3, 6)	(2, 4, 10)
(3, 4, 7)	(3, 5, 11)
(4, 5, 8)	(4, 6, 12)
(5, 6, 9)	(5, 7, 0)
(6, 7, 10)	(6, 8, 1)
(7, 8, 11)	(7, 9, 2)
(8, 9, 12)	(8, 10, 3)
(9, 10, 0)	(9, 11, 4)
(10, 11, 1)	(10, 12, 5)
(11, 12, 2)	(11, 0, 6)
(12, 0, 3)	(12, 1, 7)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CRAPO, H. and G. ROTA, Combinatorial geometries, University of Waterloo and MIT, déc. 1968
- [3] DUBREIL-JACOTIN, M. L., L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis... Paris, Gauthier Villars 1953, partie III.
- [2] DEMBOWSKI, P., Finite Geometries, *Ergebnisse der Math.* 44, 1968
- [7] HEUZÉ, G., Plans finis, 1968, Département de Mathématiques, Orléans.
- [8] NETTO, 1893, Zur théorie der Tripelsystem, *Math. Annalen* 42, p. 143-152.
- [5] HANANI, 1960, On quadruple systems, *Cand. J. Math.* 12, 145-157.
- [6] HANANI, 1965, A balanced incomplete block design, *Ann. Math. Statist.* 36, 711.
- [4] GUERIN, R., 1965, Vue d'ensemble sur les plans en blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, *Rev. Internat. Statist.* 33, 24-58.

(Reçu le 9 juillet 1970)

L. Lesieur
112 bis rue Houdan
92 Sceaux