Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES

Autor: Lesieur, L.

Kapitel: 6. Les (k, r) plans combinatoires à v éléments, v < 20.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43861

Propriété 5. k *divise* $r\,(r-1)$ *donc* $h\,(h-1)$ (4)

En effet $kb = vr = r + (k-1)\,r^2 = kr^2 - r\,(r-1)$

Propriété 6. $k\,(k-1)$ *divise* $v\,(v-1)$ (5)

Cela résulte de $v\,(v-1) = v\,(k-1)\,r = k\,(k-1)\,b$.

En vue d'étudier les (k, r) plans combinatoires à v éléments, v donné, on peut remarquer qu'il existe toujours la solution:

$$k = 2\,r = v - 1.$$

qui est la solution triviale d'un ensemble à v éléments dont les droites sont constituées par les sous-ensembles à deux éléments. Cette solution est représentée par exemple par v points en position générale dans le plan. Nous l'écarterons des solutions explicites que nous allons maintenant donner pour le cas $v \leqslant 20$. A titre d'exemple, on peut vérifier que les 4 possibilités trouvées au § 3 pour les plans combinatoires à 5 éléments ne donnent qu'un (k, r)-plan, le dernier cas, qui correspond précisément à $k = 2$, $r = 4$.

6. *Les (k, r) plans combinatoires à v éléments, $v < 20$.*

Indiquons sur le cas $v = 13$ le procédé de recherche des conditions nécessaires.

On utilise les conditions nécessaires $v - 1 = (k-1)\,r$, $r \geqslant k$, $k \mid r\,(r-1)$; on a donc: $v - 1 = 12 = 3 \times 2 \times 2$ d'où les possibilités:

$k - 1 = 1$, $r = 12$ c'est-à-dire $k = 2$, $r = 12$ (solution triviale)
$k - 1 = 2$, $k = 3$, $r = 6$ qui vérifie bien $k \mid r\,(r-1)$.
$k - 1 = 3$, $k = 4$, $r = 4$ qui donne le plan projectif d'ordre 3.
$k - 1 = 4$, $k = 5$, $r = 3$ est impossible $(r \geqslant k)$.

En procédant de même pour tous les nombres $v < 20$ et en écartant les solutions triviales et celles qui correspondent aux plans projectifs ou aux plans affines, il reste les trois cas suivants à étudier pour lesquels le problème d'existence se pose.

1^er^ cas. $v = 13$, $k = 3$, $r = 6$.

En numérotant les points 0, 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′, 4, 4′, 5, 5′, 6, 6′ on peut obtenir, après quelques tâtonnements, une solution avec les 26 droites suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}011'\\022'\\033'\\044'\\055'\\066'\end{array}\right\}\text{6 droites}\qquad\left.\begin{array}{r}123\\143'\\152'\\164'\\15'6'\end{array}\right\}\text{5 droites}\qquad\left.\begin{array}{l}1'2\ 3'\\1\ 2'6\\1'4\ 5'\\1'5\ 6'\\1'4'3\end{array}\right\}\text{5 droites}$$

$$\left.\begin{array}{l}24\ 6'\\24'5\\26\ 5'\end{array}\right\}\text{3 droites}\qquad\left.\begin{array}{l}453\\462'\end{array}\right\}2$$

$$\left.\begin{array}{r}3'65\\3'2'5'\\3'4'6'\end{array}\right\}\text{3 droites}\qquad 5'34'\}\ 1\qquad 6'2'3\}\ 1$$

Chaque droite contient 3 points et par tout point il passe 6 droites. Le nombre d'Euclide est $h = 3$.

On peut obtenir une solution algébrique de ce problème (voir en Appendice).

2^e^ *cas.* $v = 15$, $k = 3$, $r = 7$

Une solution peut être obtenue ici en appliquant une méthode générale (cf. [2], page 29) à partir d'un espace projectif de dimension 3 sur le corps fini F_2 à 2 éléments. Les points sont ceux de l'espace, les droites sont celles de l'espace. La structure est alors celle d'un (k, r)-plan combinatoire. Numérotons les points comme l'indique la figure 8.

Les 35 droites correspondent aux parties suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}011'\\022'\\033'\\044'\\055'\\066'\\077'\end{array}\right\}\text{7 dr}\qquad\left.\begin{array}{l}142'\\124'\\136'\\157'\\163'\\175'\end{array}\right\}\text{6 dr}\qquad\left.\begin{array}{l}235'\\241'\\253'\\267'\\276'\end{array}\right\}\text{5 dr}\qquad\left.\begin{array}{l}347'\\352'\\361'\\374'\end{array}\right\}\text{4 dr}\qquad\left.\begin{array}{l}456'\\465'\\473'\end{array}\right\}\text{3 dr}$$

$$\left.\begin{array}{l}564'\\571'\end{array}\right\}\text{2 dr}\qquad\left.\begin{array}{l}1'\ 2'\ 4'\\1'\ 3'\ 6'\\1'\ 5'\ 7'\end{array}\right\}\text{3 dr}\qquad 3'\ 4'\ 7'\ \}\ \text{1 dr}$$

$$672'\ \}\ \text{1 dr}\qquad 4'\ 5'\ 6'\ \}\ \text{1 dr}$$

$$\left.\begin{array}{l}2'\ 3'\ 5'\\2'\ 6'\ 7'\end{array}\right\}\text{2 dr}$$

3^e^ *cas.* $v = 19$, $k = 3$, $r = 9$

Une solution peut être obtenue *par un système de Netto*, [2] p. 98, par la méthode suivante:

On part du corps F_{19} à 19 éléments. C'est l'ensemble S. Le groupe multiplicatif Γ des carrés non nuls possède 9 éléments qui sont:

$$\begin{array}{l} \Gamma = \{1, \; 4, \; 9, \; 16, \; 6, \; 17, \; 11, \; 7, \; 5\} \\ \qquad\quad\; 2^2 \; 3^2 \;\; 4^2 \; 5^2 \;\; 6^2 \;\; 7^2 \; 8^2 \; 9^2 \end{array}$$

Il existe un sous-groupe multiplicatif G de Γ qui est formé des 3 éléments:

$$G = \{1, \; 11, \; 7\}$$

Alors, les triples alignés sont les transformés de G par les transformations du groupe Φ à 19×9 éléments:

$$x \to x\alpha + a \qquad \alpha \in \Gamma, \; a \in F_q$$

Comme une même droite peut être obtenue à partir de 3 transformations différentes il existe $b = \dfrac{19 \times 9}{3} = 57$ droites. On a $vr = kb$, d'où $r = 3 \times 19 \times 3 \times \dfrac{1}{19} = 9$ ce qui donne bien les paramètres $k = 3$, $r = 9$ du cas $v = 19$.

On remarquera que les 3 cas à étudier correspondent tous à $k = 3$, c'est-à-dire à des *systèmes de triplets* de Steiner, ([2], p. 97). Or le problème d'existence des solutions est résolu dans ce cas depuis longtemps (Kirkman, 1847, Netto [8], 1893) par la condition nécessaire

$$k\,\{k-1) = 6 \text{ divise } v\,(v-1) = 19 \times 18 \text{ (propriété 6)}$$

Beaucoup plus récemment, Hanani [6], 1965, a démontré que cette condition est suffisante pour $k \leqslant 5$. Le problème est ouvert pour les valeurs supérieures de k. On trouvera des indications sur les résultats connus dans [4].

Appendice (Netto [8] *p.* 145*)* $v = 6 \times 2 + 1$ *premier:*

Une solution du 1

On considère une racine primitive mod 13, par exemple:
$g = 2$ dont les puissances sont:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & 3, & 6, & 12, & 11, & 9, & 5, & 10, & 7 \\ 1, & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & g^8 & g^9 & g^{10} & g^{11} \end{array}$$

On forme les triples:

(1) $(0, 1, 4)$, (028)

$(0, g^0, g^2)$, $(0, g^1, g^3)$

et 12 autres à partir de ceux-là:

(2) $(\chi, \chi+g^\alpha, \chi+g^{2\alpha})$ $(\chi = 1, 2, 3, ..., 12)$

ou $(\chi, \chi+1, \chi+4)$ $(\chi , \chi+2, \chi+8)$ $\chi = 0, 1, ..., 12$

On obtient alors les $13 \times 2 = 26$ triples cherchés qui sont donc explicitement:

(0, 1, 4)	(0, 2, 8)
(1, 2, 5)	(1, 3, 9)
(2, 3, 6)	(2, 4, 10)
(3, 4, 7)	(3, 5, 11)
(4, 5, 8)	(4, 6, 12)
(5, 6, 9)	(5, 7, 0)
(6, 7, 10)	(6, 8, 1)
(7, 8, 11)	(7, 9, 2)
(8, 9, 12)	(8, 10, 3)
(9, 10, 0)	(9, 11, 4)
(10, 11, 1)	(10, 12, 5)
(11, 12, 2)	(11, 0, 6)
(12, 0, 3)	(12, 1, 7)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CRAPO, H. and G. ROTA, Combinatorial geometries, University of Waterloo and M I T, déc. 1968

[3] DUBREIL-JACOTIN, M. L., L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis... Paris, Gauthier Villars 1953, partie III.

[2] DEMBOWSKI, P., Finite Geometries, *Ergebnisse der Math. 44*, 1968

[7] HEUZÉ, G., Plans finis, 1968, Département de Mathématiques, Orléans.

[8] NETTO, 1893, Zur théorie der Tripelsystem, *Math. Annalen 42*, p. 143-152.

[5] HANANI, 1960, On quadruple systems, *Cand. J. Math.* 12, 145-157.

[6] HANANI, 1965, A balanced incomplete block design, *Ann. Math. Statist. 36*, 711.

[4] GUERIN, R., 1965, Vue d'ensemble sur les plans en blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, *Rev. Internat. Statist. 33*, 24-58.

(Reçu le 9 juillet 1970)

L. Lesieur
112 bis rue Houdan
92 Sceaux