Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS

Autor: Lagrange, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43847

SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS

par M. Jean LAGRANGE

1. Le théorème qui suit, bien qu'élémentaire et de démonstration facile, ne semble pas avoir encore été remarqué.

THÉORÈME:

Quel que soit l'entier naturel h, le système

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = \dots = x_h^4 + y_h^4 + z_h^4 \tag{1}$$

a des solutions non triviales en entiers naturels.

Par solution non triviale on entend que, à l'ordre près, les triplets (x_i, y_i, z_i) sont tous distincts.

On peut encore énoncer:

si $f(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n par des sommes de trois bicarrés on a

$$\limsup_{n \to \infty} f(n) = +\infty.$$

C'est l'analogue du théorème connu pour des sommes de deux carrés ou de deux cubes ([1], p. 333).

2. *Démonstration du théorème :*

On utilise l'identité bien connue ([2], p. 651)

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 + (2b)^4 = 2(a^2 + 3b^2)^2.$$

D'une solution non triviale de $a^2 + 3b^2 = c^2 + 3d^2 \equiv 1 \pmod 2$ on déduit une solution de (1) avec $h = 2$ ([2], p. 653). Le lecteur vérifiera facilement que la solution obtenue est non triviale [1].

Soit maintenant N un entier impair, on désigne par $E(N)$ l'excès du nombre des diviseurs de N congrus à 1 mod 6 sur le nombre des diviseurs de N congrus à -1 mod 6; on sait alors que N admet $2\,E(N)$ décom-

[1] Si on ne suppose pas $a^2 + 3\,b^2$ impair, on peut obtenir une solution triviale comme le montre l'exemple $1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2$.

positions en entiers rationnels de la forme $a^2 + 3b^2$ ([3], p. 80). Donc si N n'est pas un carré parfait ou le triple d'un carré parfait, N admet $E(N)/2$ décompositions en entiers naturels de la forme $a^2 + 3b^2$. En particulier, prenant pour N le produit des k premiers nombres premiers congrus à 1 mod 6, on a $E(N) = 2^k$ et on obtient une solution du système (1) avec $h = 2^{k-1}$; ce qui démontre le théorème.

3. *Exemples.*

On prend $N = 7^2 . 13$, d'où $E(N) = 6$; on obtient une solution du système (1) avec $h = 3$; soit avec une notation évidente

$$(4, 23, 27)^4 = (7, 21, 28)^4 = (12, 17, 29)^4$$

D'après [4] c'est la plus petite solution de (1) avec $h = 3$.

On peut espérer obtenir en prenant pour N le nombre défini à la fin du paragraphe 2) la plus petite solution de (1) avec $h = 2^{k-1}$.

Voici les 32 décompositions du nombre 14 543 995 421 936 162 obtenues avec N = 7 . 13 . 19 . 31 . 37 . 43 = 85 276 009

$$\begin{aligned}
&(5,9232,9237)^4 = (157,9155,9312)^4 = (368,9045,9413)^4 = (873,8767,9640)^4 = \\
&= (880,8763, 9643)^4 = (960,8717, 9677)^4 = (1063,8657, 9720)^4 = \\
&= (1383,8465, 9848)^4 = (1565,8352, 9917)^4 = (1592,8335, 9927)^4 = \\
&= (1752,8233, 9985)^4 = (1933,8115,10048)^4 = (2277,7883,10160)^4 = \\
&= (2435,7773,10208)^4 = (2640,7627,10267)^4 = (2687,7593,10280)^4 = \\
&= (2787,7520,10307)^4 = (3127,7265,10392)^4 = (3272,7153,10425)^4 = \\
&= (3355,7088,10443)^4 = (3625,6872,10497)^4 = (3707,6805,10512)^4 = \\
&= (3953,6600,10553)^4 = (4103,6472,10575)^4 = (4177,6408,10585)^4 = \\
&= (4272,6325,10597)^4 = (4297,6303,10600)^4 = (4755,5888,10643)^4 = \\
&= (4833,5815,10648)^4 = (4925,5728,10653)^4 = (4968,5687,10655)^4 = \\
&= (5295,5368,10663)^4.
\end{aligned}$$

4. *Remarque :*

Il est possible qu'à partir d'un entier N on puisse obtenir en décomposant le nombre $2N^2$ en somme de trois bicarrés une valeur de h supérieure à $E(N)/2$. Ce sera toujours le cas si, partant d'une solution de $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ on prend $N = x^2 - xy + y^2$. En plus des $E(N)/2$ décompositions du nombre $2N^2 = x^4 + y^4 + (x - y)^4$ on obtient la décomposition $u^4 + v^4 + (x - y)^4$.

Ainsi Lander et Parkin [4] ont trouvé « quite by chance » les égalités:

$$(1,133,134)^4 = (1,59,158)^4 = (71,83,154)^4$$

$$(1,256,257)^4 = (1,193,292)^4 = (32,239,271)^4 = (109,184,293)^4 =$$
$$= (139,157,296)^4.$$

RÉFÉRENCES

[1]. Hardy and Wright. *An Introduction to the theory of numbers ;* Oxford, 1938.
[2]. Dickson. *History of the theory of numbers,* vol. 2; réedition, Chelsea, 1952.
[3]. —— *Introduction to the theory of numbers ;* réedition, Dover, 1957.
[4]. Lander and Parkin. Equal sums of biquadrates; *Math. Comp.20,* , (1966), 450-451.

(Reçu le 6 février 1970)

Jean Lagrange
Faculté des Sciences
Reims

vide-leer-empty