

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS
Autor: Lagrange, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43847>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SOMMES ÉGALES DE TROIS BICARRÉS

par M. Jean LAGRANGE

1. Le théorème qui suit, bien qu'élémentaire et de démonstration facile, ne semble pas avoir encore été remarqué.

THÉORÈME:

Quel que soit l'entier naturel h , le système

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = \dots = x_h^4 + y_h^4 + z_h^4 \quad (1)$$

a des solutions non triviales en entiers naturels.

Par solution non triviale on entend que, à l'ordre près, les triplets (x_i, y_i, z_i) sont tous distincts.

On peut encore énoncer:

si $f(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n par des sommes de trois bicarrés on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty.$$

C'est l'analogie du théorème connu pour des sommes de deux carrés ou de deux cubes ([1], p. 333).

2. *Démonstration du théorème :*

On utilise l'identité bien connue ([2], p. 651)

$$(a + b)^4 + (a - b)^4 + (2b)^4 = 2(a^2 + 3b^2)^2.$$

D'une solution non triviale de $a^2 + 3b^2 = c^2 + 3d^2 \equiv 1 \pmod{2}$ on déduit une solution de (1) avec $h = 2$ ([2], p. 653). Le lecteur vérifiera facilement que la solution obtenue est non triviale¹.

Soit maintenant N un entier impair, on désigne par $E(N)$ l'excès du nombre des diviseurs de N congrus à 1 mod 6 sur le nombre des diviseurs de N congrus à -1 mod 6; on sait alors que N admet $2 E(N)$ décom-

¹ Si on ne suppose pas $a^2 + 3b^2$ impair, on peut obtenir une solution triviale comme le montre l'exemple $1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2$.

positions en entiers rationnels de la forme $a^2 + 3b^2$ ([3], p. 80). Donc si N n'est pas un carré parfait ou le triple d'un carré parfait, N admet $E(N)/2$ décompositions en entiers naturels de la forme $a^2 + 3b^2$. En particulier, prenant pour N le produit des k premiers nombres premiers congrus à 1 mod 6, on a $E(N) = 2^k$ et on obtient une solution du système (1) avec $h = 2^{k-1}$; ce qui démontre le théorème.

3. Exemples.

On prend $N = 7^2 \cdot 13$, d'où $E(N) = 6$; on obtient une solution du système (1) avec $h = 3$; soit avec une notation évidente

$$(4, 23, 27)^4 = (7, 21, 28)^4 = (12, 17, 29)^4$$

D'après [4] c'est la plus petite solution de (1) avec $h = 3$.

On peut espérer obtenir en prenant pour N le nombre défini à la fin du paragraphe 2) la plus petite solution de (1) avec $h = 2^{k-1}$.

Voici les 32 décompositions du nombre 14 543 995 421 936 162 obtenues avec $N = 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 = 85\,276\,009$

$$\begin{aligned} (5,9232,9237)^4 &= (157,9155,9312)^4 = (368,9045,9413)^4 = (873,8767,9640)^4 = \\ &= (880,8763, 9643)^4 = (960,8717, 9677)^4 = (1063,8657, 9720)^4 = \\ &= (1383,8465, 9848)^4 = (1565,8352, 9917)^4 = (1592,8335, 9927)^4 = \\ &= (1752,8233, 9985)^4 = (1933,8115,10048)^4 = (2277,7883,10160)^4 = \\ &= (2435,7773,10208)^4 = (2640,7627,10267)^4 = (2687,7593,10280)^4 = \\ &= (2787,7520,10307)^4 = (3127,7265,10392)^4 = (3272,7153,10425)^4 = \\ &= (3355,7088,10443)^4 = (3625,6872,10497)^4 = (3707,6805,10512)^4 = \\ &= (3953,6600,10553)^4 = (4103,6472,10575)^4 = (4177,6408,10585)^4 = \\ &= (4272,6325,10597)^4 = (4297,6303,10600)^4 = (4755,5888,10643)^4 = \\ &= (4833,5815,10648)^4 = (4925,5728,10653)^4 = (4968,5687,10655)^4 = \\ &= (5295,5368,10663)^4. \end{aligned}$$

4. Remarque :

Il est possible qu'à partir d'un entier N on puisse obtenir en décomposant le nombre $2N^2$ en somme de trois bicarrés une valeur de h supérieure à $E(N)/2$. Ce sera toujours le cas si, partant d'une solution de $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ on prend $N = x^2 - xy + y^2$. En plus des $E(N)/2$ décompositions du nombre $2N^2 = x^4 + y^4 + (x - y)^4$ on obtient la décomposition $u^4 + v^4 + (x - y)^4$.

Ainsi LANDER et PARKIN [4] ont trouvé « quite by chance » les égalités :

$$\begin{aligned}(1,133,134)^4 &= (1,59,158)^4 = (71,83,154)^4 \\ (1,256,257)^4 &= (1,193,292)^4 = (32,239,271)^4 = (109,184,293)^4 = \\ &= (139,157,296)^4.\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1]. HARDY and WRIGHT. *An Introduction to the theory of numbers* ; Oxford, 1938.
- [2]. DICKSON. *History of the theory of numbers*, vol. 2; réédition, Chelsea, 1952.
- [3]. ——— *Introduction to the theory of numbers* ; réédition, Dover, 1957.
- [4]. LANDER and PARKIN. Equal sums of biquadrates; *Math. Comp.*20, , (1966), 450-451.

(Reçu le 6 février 1970)

Jean Lagrange
Faculté des Sciences
Reims

vide-leer-empty