Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES
Autor: Lesieur, L.
Kapitel: 2. Treillis géométrique L (S)
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43861

2. *Treillis géométrique L (S)*

Les ensembles fermés (ou variétés) suffisent à définir l'application de fermeture de Moore en postulant que l'intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.

On peut les ordonner par la relation d'inclusion des ensembles et obtenir ainsi un *treillis* (particulier) qu'on appelle *géométrique*. Il est possible de donner des propriétés caractéristiques de ces treillis (voir [3]) qui permettent de reconstituer la géométrie combinatoire. En particulier la notion de dimension apparaît également comme longueur d'une chaîne maximale allant de $\emptyset$ à S, diminuée de 1, cette longueur étant un invariant pour toutes les chaînes maximales considérées.

Exemple :

Géométrie sur 5 points schématisée par le dessin de la figure 3, où les points situés sur les droites dessinées constituent une variété, qui est une droite de cette géométrie. La figure 4 représentente le treillis $L(S)$ correspondant. C'est un treillis de dimension 2 (rang 3). Une géométrie de dimension 2 s'appelle un plan.

Bien entendu, une géométrie projective ou affine de dimension finie constitue un exemple de géométrie combinatoire (que l'on peut d'ailleurs caractériser dans la classe des géométries combinatoires). Mais il y en a beaucoup d'autres, citons les géométries affines généralisées ([3], p. 303), l'ensemble des relations d'équivalence sur un ensemble, les six exemples dits classiques de [1] etc...

3. *Géométries sur les ensembles finis*

Cherchons par exemple les géométries finies sur 5 points.

dimension 1 : S est la seule droite. (fig. 5)

dimension 2 : 4 possibilités, avec représentation plane de la figure 6

dimension 3 : 3 possibilités avec représentation dans l'espace de la figure 7

dimension 4 : 1 possibilité, représentée par 5 points en position générale dans l'espace de dimension 4.

Le nombre g_{nd} des géométries « non isomorphes » sur n éléments et de dimension d est donné par le tableau [1], § 3.