

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	16 (1970)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES
<b>Autor:</b>	Letta, G.
<b>Kurzfassung:</b>	RÉSUMÉ
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-43860">https://doi.org/10.5169/seals-43860</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE  
DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION  
DES FONCTIONS CROISSANTES

par G. LETTA (Pisa)

RÉSUMÉ

On expose une démonstration élémentaire du théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité p.p. d'une fonction  $F$  croissante et la décomposition de Lebesgue de la mesure engendrée par  $F$ . Cette démonstration ne fait pas appel au lemme de recouvrement de Vitali (ni à aucune autre proposition analogue). On démontre d'abord un théorème (Théor. 1) concernant une fonction  $F$  quelconque (non nécessairement croissante) et donnant un certain nombre d'inégalités entre l'accroissement  $F(b) - F(a)$  de la fonction  $F$  sur un intervalle  $[a, b]$  et les intégrales inférieures et supérieures, sur cet intervalle, des quatre dérivées généralisées de  $F$ .

Ce théorème permet déjà d'obtenir le théorème de Lebesgue dans le cas particulier où la fonction  $F$  est, ou bien localement lipschitzienne (Cor. 1), ou bien singulière (Cor. 2). On démontre ensuite le théorème de Lebesgue dans le cas général (Théor. 2).

Pour toute application  $F$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , nous poserons<sup>1</sup> (pour  $x \in \mathbf{R}$ )

$$F_-(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y \leq x} F(y) , \quad F_+(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y \geq x} F(y) ,$$

$$F^-(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y \leq x} F(y) , \quad F^+(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y \geq x} F(y) ,$$

$$D_- F(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} , \quad D_+ F(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} ,$$

$$D^- F(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} , \quad D^+ F(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} .$$

<sup>1</sup> On note  $\mathbf{R}$  l'ensemble des nombres réels, et  $\mathbf{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels.