

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.

**Kapitel:** 14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

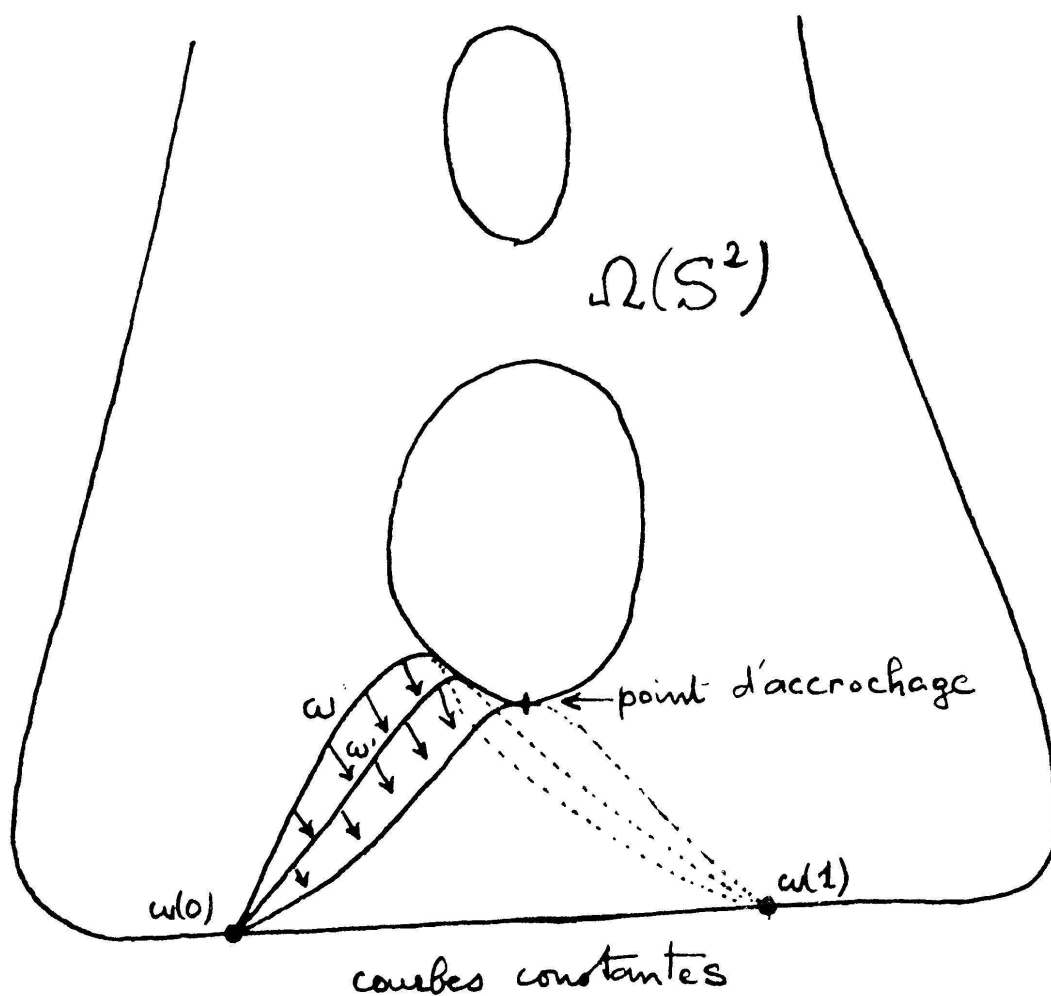
### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(lacets sans point base) de  $S^2$ . Dans  $\Omega(S^2)$  on considère le chemin  $\omega$ , dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les parallèles de  $S^2$ . Sur  $\Omega(S^2)$  on a la fonction longueur; si  $\omega$  ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins  $\omega'$ , de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, on a trouvé une g.p., ou on a déformé  $\omega$  en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque  $\omega$  est précisément un générateur de  $\pi_2(S^2) \neq 0$ . C'est donc que notre chemin  $\omega$  reste « accroché » et le point d'accrochage est précisément une g.p.



#### 14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques.

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes

(des g.p.  $c_1, \dots, c_k$  sont dites *géométriquement distinctes* si les sous-ensembles  $c_1(\mathbf{R}), \dots, c_k(\mathbf{R})$  de  $M$  sont distincts). Nous ne donnons pas le détail de leurs résultats; en effet il est actuellement raisonnable de conjecturer que toute v.r. compacte admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

D'abord, bien sûr, on ne connaît pas de v.r. compacte, de dimension  $\geq 2$ , dont on ait pu montrer qu'elle n'a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes. Ensuite d'une part on dispose maintenant du: **(14.1): théorème** (Gromoll-Meyer, [10]): *soit  $\{b_k(\Omega(M))\}$  la suite des nombres de Betti de l'espace  $\Omega(M) = C^0(S^1; M)$ . Soit  $M$  une variété compacte simplement connexe telle que la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée (i.e.  $\forall a \in \mathbf{N} \exists k$  tel que  $b_k(\Omega(M)) > a$ ). Alors, quelle que soit la s.r. sur  $M$ , la v.r.  $(M, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.*

(Noter que les nombres de Betti  $b_k(\Omega(M))$  pour une variété  $M$  compacte simplement connexe sont tous finis.)

D'autre part, bien que l'on ne sache pas exactement quelles sont les variétés compactes  $M$  pour lesquelles la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée, on a ceci: (i) plusieurs classes assez larges de  $M$  compactes ayant une telle suite non bornée; (ii) les seules variétés simplement connexes connues pour lesquelles cette suite est bornée sont les  $P_i^n$ . Or les  $P_i^n$  ont, à vrai dire pour leur s.r. canonique  $g_0$ , une bonne infinité de g.p. géométriquement distinctes! Remarquer que l'on ne sait pas, même pour des s.r.  $g$  voisines de  $g_0$ , si  $(P_i^n, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

Quant à la démonstration de (14.1), elle est fine et technique. En voici un schéma heuristique, seulement dans le cas « non dégénéré » (le cas dégénéré est cependant essentiel et complique grandement la démonstration). Il faut connaître la théorie de Morse pour les sous-variétés critiques non-dégénérées et pour les variétés de dimension infinie. On procède par l'absurde: s'il n'y a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes, c'est qu'il existe  $k$  géodésiques périodiques simples  $c_1, \dots, c_S$ , telles que toute g.p. soit un recouvrement fini de l'une d'entre elles. A chaque g.p. on associe un index  $k$ ; les inégalités de Morse disent que le nombre de g.p. d'index égal à  $k$  est supérieur ou égal à  $b_k(\Omega(M))$ . Etudiant les index  $k(m)$  d'une g.p. recouvrant  $m$  fois une g.p. donnée, on trouve que  $k(m)$  croît, en gros, comme une progression arithmétique. Ceci montre donc que les  $b_k(\Omega(M))$  sont bornés. C.Q.F.D.