

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 13. Existence d'une géodésique périodique.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

12. Variétés telles que « TGPS ».

Un exemple surprenant est la surface de Zoll :

(12.1): *théorème (Zoll, [16]): sur S^2 il existe des s.r. g telles que « TGPS » et que (S^2, g) ne soit pas isométrique à (S^2, g_0) .*

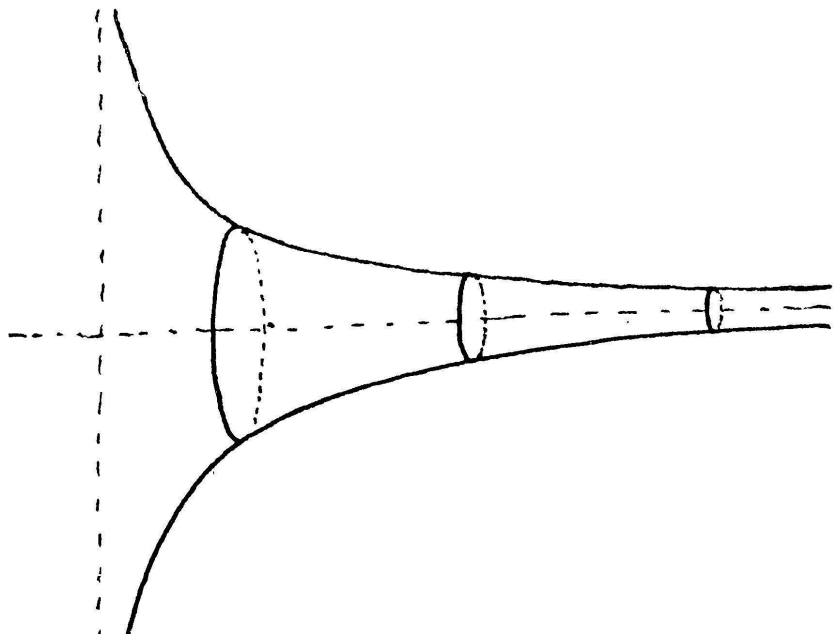
Ainsi « TGPS » n'est pas caractéristique des (P_i^n, g_0) en toute généralité. D'ailleurs (communication de A. Weinstein) on peut construire des s.r. analogues sur les $S^n \forall n \geq 2$. Cependant « TGPS » caractérise (P_1^2, g_0) :

(12.2): *théorème (Green, [9]): si (P_1^2, g_0) est telle que « TGPS », alors (P_1^2, g) est isométrique à (P_1^2, g_0) .*

Toutes les généralisations possibles de (12.2), pour différents n et i , sont des problèmes entièrement ouverts. La démonstration de (12.2) est absolument particulière à la dimension deux; elle utilise, pour voir (P_1^2, g) , deux inégalités en sens contraire; la première est basée sur la formule de Gauss-Bonnet en dimension deux et une inégalité dont l'extension en dimension plus grande ne correspond plus à la formule de Gauss-Bonnet. La deuxième inégalité utilise une formule de géométrie intégrale de Santalo dont l'extension en dimension plus grande ne fonctionne que si le projectif (P_1^n, g) (pour lequel on voudrait démontrer une généralisation du théorème (12.2)) possédait une hypersurface homotope à P_1^{n-1} et totalement géodésique, ce qui n'est pas le cas en général.

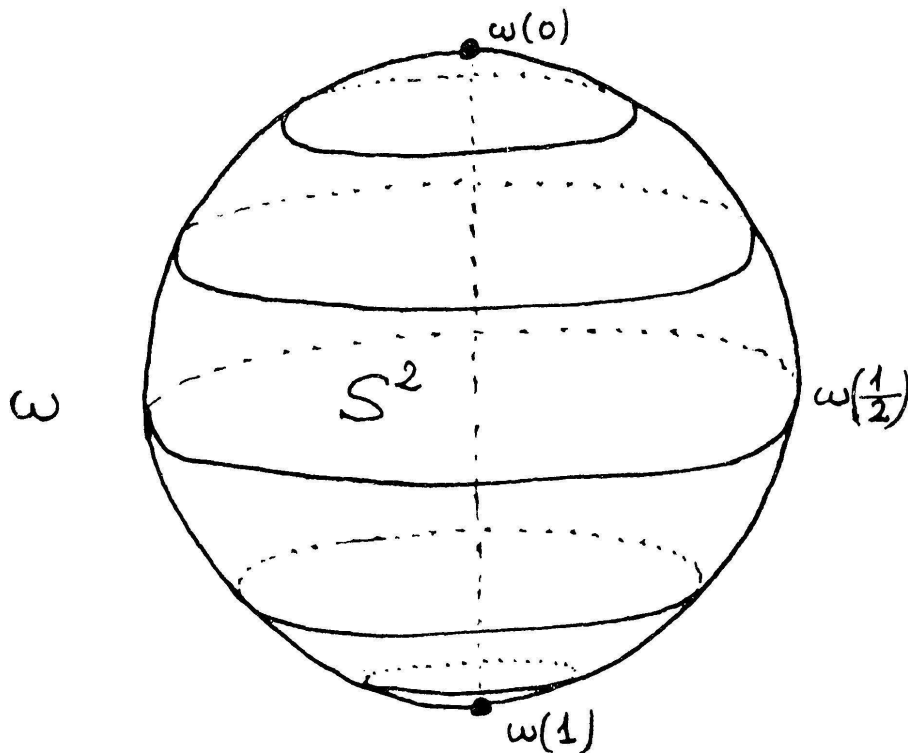
13. Existence d'une géodésique périodique.

Une variété complète, non compacte, même non simplement connexe, n'admet pas nécessairement de géodésique périodique (g.p.); exemple la surface de révolution ci-après :



Un théorème folklorique est le:

(13.1): soit (M, g) compacte. Alors, quelle que soit la classe d'homotopie libre α (voir (7.4)) de M , $\alpha \neq 0$, il existe une g.p. $c \in \alpha$. En particulier si M est non simplement connexe compacte, elle admet toujours une g.p.



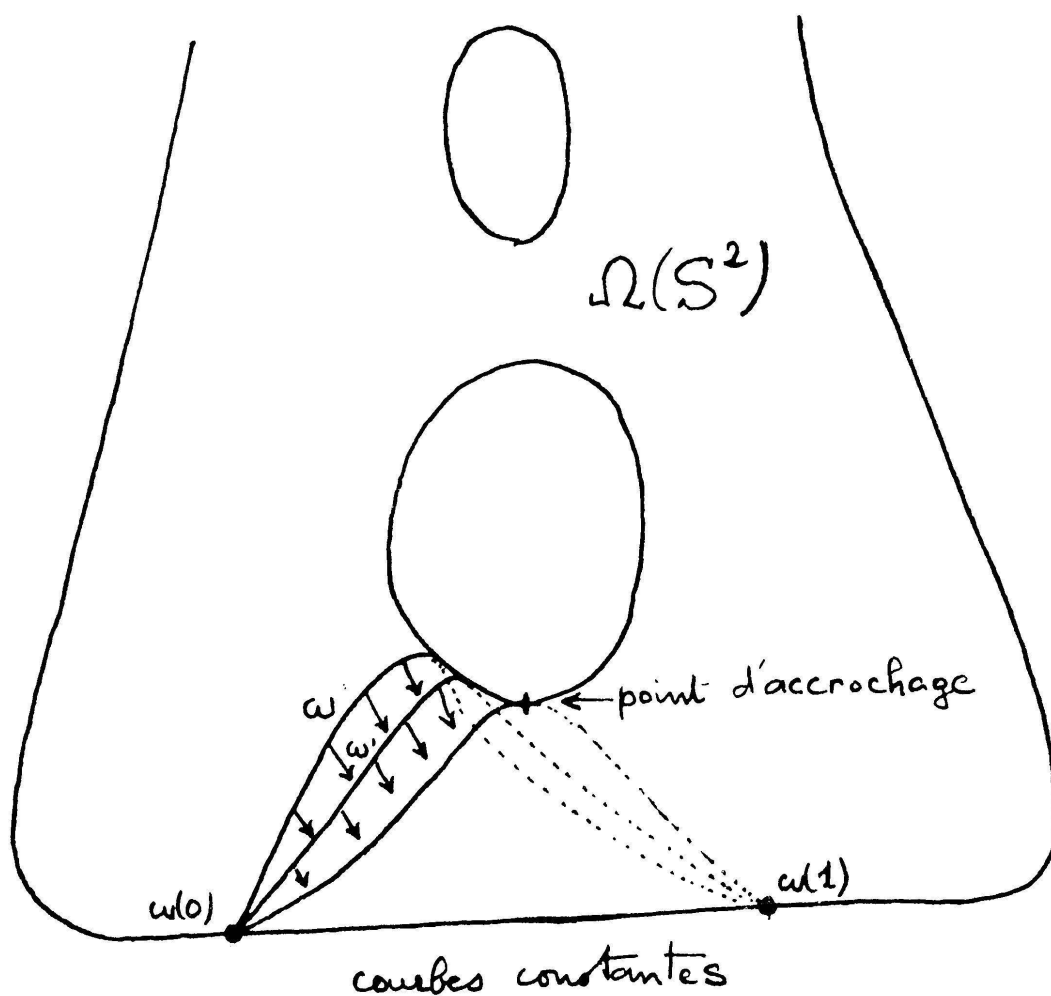
La démonstration est simple; on montre que la borne inférieure $\alpha(g) = \inf_{c \in \alpha} \text{long}(c, g)$ est réalisée, parce que M est compacte; et une courbe réalisant cette borne inférieure est nécessairement une g.p.

Par contre, si M , toujours compacte, est simplement connexe, la question de l'existence d'au moins une g.p. est beaucoup plus difficile. Poincaré fut le premier à démontrer une telle existence en 1905, pour (S^2, g) avec g analytique (Birkhoff étendit ce résultat à S^n , g toujours analytique, en 1927). Mais il fallut attendre jusqu'en 1952 pour le:

(13.2): *théorème (Fet-Lyusternik): toute v.r. compacte admet une g.p.*

La démonstration est un usage typique de la théorie de Morse. Cette démonstration consiste à mettre en forme l'idée suivante, que nous présentons sur S^2 . Soit $\Omega(S^2) = C^0(S^1; S^2)$ l'espace des courbes fermées

(lacets sans point base) de S^2 . Dans $\Omega(S^2)$ on considère le chemin ω , dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les parallèles de S^2 . Sur $\Omega(S^2)$ on a la fonction longueur; si ω ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins ω' , de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, on a trouvé une g.p., ou on a déformé ω en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque ω est précisément un générateur de $\pi_2(S^2) \neq 0$. C'est donc que notre chemin ω reste « accroché » et le point d'accrochage est précisément une g.p.



14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques.

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes