Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 13. Existence d'une géodésique périodique.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

12. *Variétés telles que « TGPS ».*

Un exemple surprenant est la surface de Zoll:

(12.1): *théorème* (Zoll, [16]): *sur* S^2 *il existe des* s.r. g *telles que* « TGPS » *et que* (S^2, g) *ne soit pas isométrique à* (S^2, g_0).

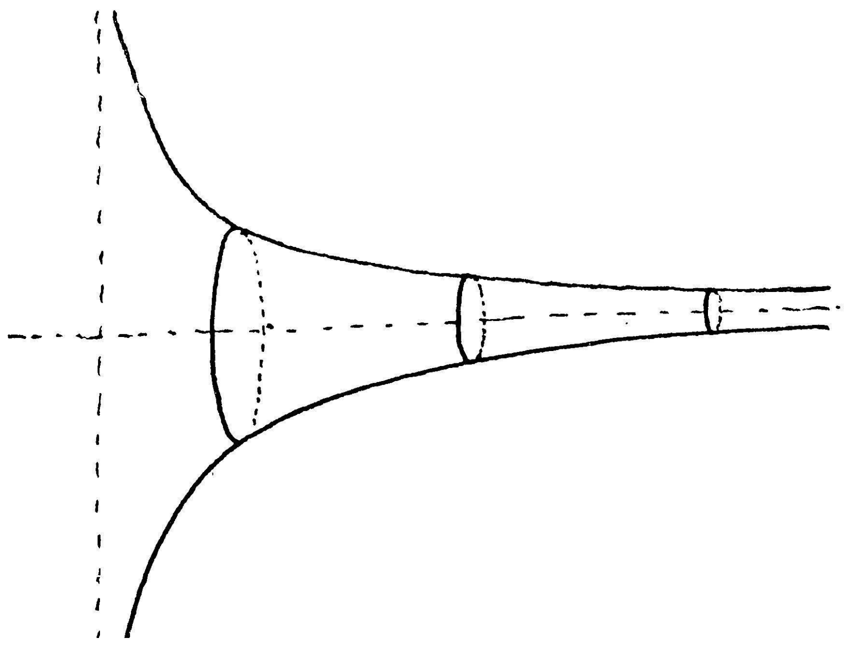
Ainsi « *TGPS* » n'est pas caractéristique des (P_i^n, g_0) en toute généralité. D'ailleurs (communication de A. Weinstein) on peut construire des s.r. analogues sur les $S^n \; \forall \; n \geqq 2$. Cependant « *TGPS* » caractérise (P_1^2, g_0):

(12.2): *théorème* (Green, [9]): *si* (P_1^2, g_0) *est telle que* « TGPS », *alors* (P_1^2, g) *est isométrique à* $(P,_2^1\, g_0)$.

Toutes les généralisations possibles de (12.2), pour différents n et i, sont des problèmes entièrement ouverts. La démonstration de (12.2) est absolument particulière à la dimension deux; elle utilise, pour vol (P_1^2, g), deux inégalités en sens contraire; la première est basée sur la formule de Gauss-Bonnet en dimension deux et une inégalité dont l'extension en dimension plus grande ne correspond plus à la formule de Gauss-Bonnet. La deuxième inégalité utilise une formule de géométrie intégrale de Santalo dont l'extension en dimension plus grande ne fonctionne que si le projectif (P_1^n, g) (pour lequel on voudrait démontrer une généralisation du théorème (12.2)) possédait une hypersurface homotope à P_1^{n-1} et totalement géodésique, ce qui n'est pas le cas en général.

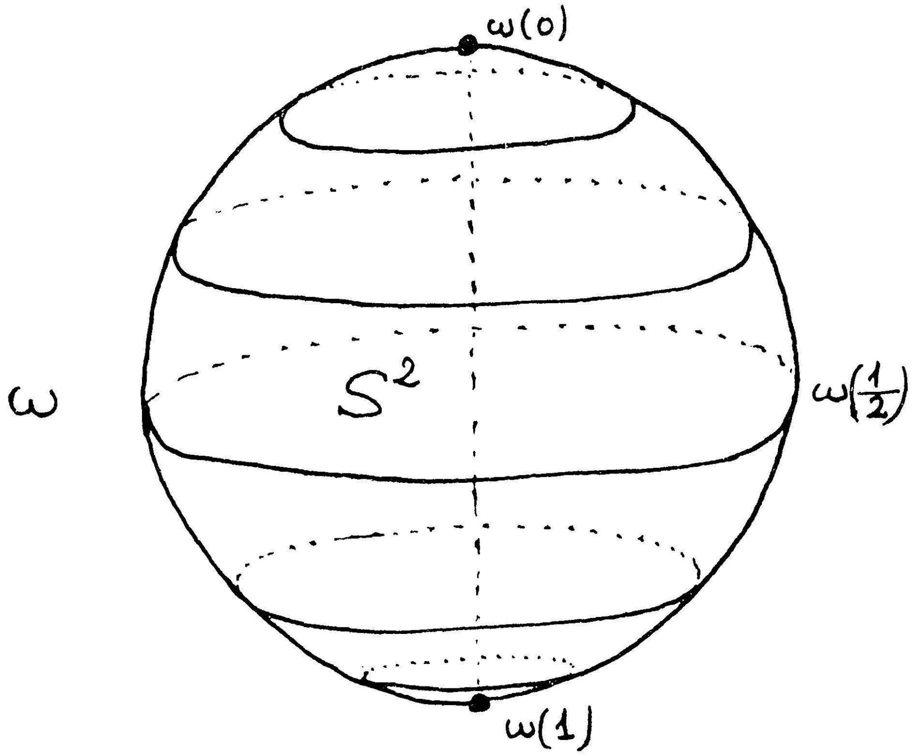
13. *Existence d'une géodésique périodique.*

Une variété complète, non compacte, même non simplement connexe, n'admet pas nécessairement de géodésique périodique (g.p.); exemple la surface de révolution ci-après:



Un théorème folklorique est le:

(13.1): *soit* (M, g) *compacte. Alors, quelle que soit la classe d'homotopie libre* α (voir (7.4)) *de* M, $\alpha \neq 0$, *il existe une* g.p. $c \in \alpha$. *En particulier si* M *est non simplement connexe compacte, elle admet toujours une* g.p.

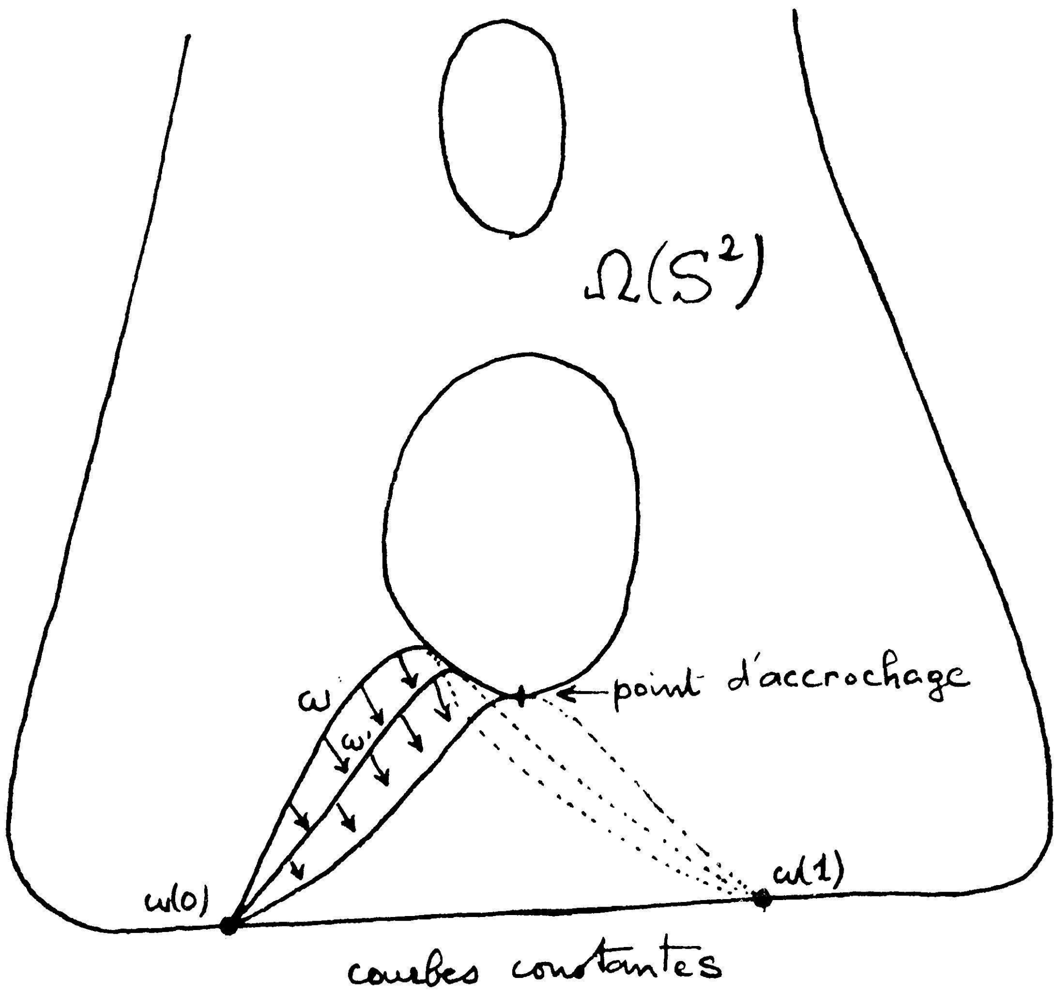


La démonstration est simple; on montre que la borne inférieure $\alpha(g) = \inf_{c \in \alpha} \operatorname{long}(c, g)$ est réalisée, parce que M est compacte; et une courbe réalisant cette borne inférieure est nécessairement une g.p.

Par contre, si M, toujours compacte, est simplement connexe, la question de l'existence d'au moins une g.p. est beaucoup plus difficile. Poincaré fut le premier à démontrer une telle existence en 1905, pour (S^2, g) avec g analytique (Birkhoff étendit ce résultat à S^n, g toujours analytique, en 1927). Mais il fallut attendre jusqu'en 1952 pour le:

(13.2): *théorème* (Fet-Lyusternik): *toute* v.r. *compacte admet une* g.p.

La démonstration est un usage typique de la théorie de Morse. Cette démonstration consiste à mettre en forme l'idée suivante, que nous présentons sur S^2. Soit $\Omega(S^2) = C^0(S^1; S^2)$ l'espace des courbes fermées (lacets sans point base) de S^2. Dans $\Omega(S^2)$ on considère le chemin ω, dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les paralléles de S^2. Sur $\Omega(S^2)$ on a la fonction longueur; si ω ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins ω', de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, ou on a trouvé une g.p., ou on a déformé ω en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque ω est précisément un générateur de $\pi_2(S^2) \neq 0$. C'est donc que notre chemin ω reste « accroché » et le point d'accrochage est précisèment une g.p.



14. *Existence de plusieurs géodésiques périodiques.*

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes