

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.

**Kapitel:** 9. Exemples de géodésiques.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si  $m, n$  sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longueur  $d(m, n)$ ) est *unique*.

(8.5): les géodésiques sont invariantes par isométries: si  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  est une isométrie et  $c$  une géodésique de  $(N, h)$ , alors  $f \circ c$  est une géodésique de  $(M, g)$ .

### 9. Exemples de géodésiques.

(9.1): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont les grands cercles (parcourus uniformément).

En effet, soit  $c$  une géodésique de  $(S^n, g_0)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de dimensions deux de  $\mathbf{R}^{n+1}$  déterminé par  $m$  et  $n$ ,  $C$  le grand cercle  $P \cap S^n$  et  $s$  la symétrie euclidienne par rapport à  $P$  et restreinte à  $S^n$ . Les seuls points fixes de  $s$  sont les points de  $C$ . Comme  $s$  est une isométrie de  $(S^n, g_0)$  elle transforme la restriction  $\bar{c}$  de  $c$  de  $m$  à  $n$  en une géodésique  $s \circ \bar{c}$  (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc  $s \circ \bar{c} = \bar{c}$ , donc  $\bar{c} \subset C$ . En particulier:

(9.2): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur  $2\pi$ .

On va voir en fait que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  ont les mêmes propriétés.

(9.3): géodésiques des submersions riemanniennes.

Soit  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(9.4): si  $c$  est une géodésique de  $(M, g)$  telle que  $c'(0) \in H_{c(0)}$ , alors  $c$  est horizontale (voir (3.6));

(9.5): si  $c$  est une telle géodésique horizontale de  $(M, g)$ , alors  $p \circ c$  est une géodésique de  $(N, h)$ .

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de  $(N, h)$  par projection des géodésiques horizontales de  $(M, g)$ ).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit  $c$  une géodésique de  $(N, h)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $\tilde{c}$  un relèvement horizontal de  $c$  et  $\tilde{m}, \tilde{n}$  les relèvements de  $m, n$ . Soit  $d$  la plus courte géodésique de  $\tilde{m}$  à  $\tilde{n}$  (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\text{long}(p \circ d) \leq \text{long}(d) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = d(m, n).$$

Comme  $p \circ d$  est d'extrémités  $m, n$  c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.

(9.6): géodésiques des  $P_i^n$  ( $i=1, 2, 4$ ).

Considérant les submersions riemanniennes (2.9), on voit que (9,5) montre que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont les projections des géodésiques horizontales (pour la submersion considérée) de  $S^{in+i-1}$ . Il suffit donc de savoir comment se projettent les grands cercles horizontaux de  $S^{in+i-1}$  sur  $P_i^n$ . On voit d'abord que les grands cercles de  $S^{in+i-1}$  revêtent tous deux fois les géodésiques de  $(P_i^n, g_0)$ , parce que  $p(-m) = p(m)$  pour tout  $m \in S^{in+i-1}$ . Donc:

(9.7): les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples, périodiques et de longueur  $\pi$ .

Pour se faire une idée de la géométrie des  $P_i^n$  ( $i=0, 1, 2, 4$ ), il faut encore savoir comment se rencontrent deux géodésiques  $c, d$  issues d'un  $m = c(0) = d(0)$ . Pour  $(S^n, g_0)$ , elles se rencontrent exactement à la distance  $\pi$  en l'antipode de  $m$ , puis de nouveau en  $m$  au temps  $2\pi$  (et c'est tout!). On en déduit que pour  $(P_1^n, g_0)$ , revêtu deux fois par  $(S^n, g_0)$ , les géodésiques issues d'un  $m \in P_1^n$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  (ce sont les droites projectives passant par  $m$ ). Le milieu (situé à une distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ ) de ces géodésiques de  $P_1^n$  passant par  $m$  décrit l'hyperplan projectif dual de  $m$ , dans la dualité associée à la structure euclidienne de  $K^{n+1}$ .

Pour les  $P_i^n$  ( $i=2, 4$ ), on note d'abord que  $T_m P_i^n$  est un  $K$ -espace vectoriel. La relation d'équivalence sur  $K^{n+1} - \{0\}$ , qui donne naissance à  $P_i^n$  montre que ([1], p. 130)  $c$  et  $d$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  si  $d'(0) \notin K \cdot c'(0)$ . Si par contre  $d'(0) \in K \cdot c'(0)$ , alors  $c$  et  $d$  se rencontrent en plus seulement en leur point à distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ . En outre, lorsque  $d'(0)$  parcourt  $K \cdot c'(0)$ , les géodésiques correspondantes forment une sphère de dimension  $i$  de  $P_i^n$ , sphère qui n'est autre qu'une droite projective. Et lorsque ces différentes  $i$ -sphères-droites projectives passant par  $m$  remplissent  $P_i^n$ , les antipodes de  $m$  sur ces sphères décrivent l'hyperplan projectif dual de  $m$  (pour la structure hermitienne de  $K^{n+1}$ ), hyperplan qui est une sous-variété de dimension réelle  $i(n-1)$  de  $P_i^n$ . On notera aussi que ces droites projectives (resp. hyperplans projectifs) sont isométriques (comme sous-variété de  $(P_i^n, g_0)$ ) aux  $(S^i, \frac{1}{2}g_0)$  (resp.  $(P_i^{n-1}, g_0)$ ) (ce sont même des sous-variétés totalement géodésiques).

(9.8): le cas de  $(P_8^2, g_0)$ .

Pour étudier les géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$ , il faut (voir (2.7)) utiliser la technique des espaces symétriques; on trouvera dans [11], p. 356 et surtout

dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$  est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des  $(F_i^n, g_0)$  ( $i=1, 2, 4$ ), en prenant  $K = \mathbf{Ca}$  et  $i = 8$ .

10. Géodésiques périodiques.

(10.1): *définition*: une géodésique  $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$  est dite périodique (ou fermée) si  $c$  est non constante et si  $c'(a) = c'(b)$ . Elle est dite en outre simple si  $c|_{[a,b[}$  est injective.

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que  $c$  se prolonge en une géodésique  $\bar{c} : \mathbf{R} \rightarrow M$  telle que  $\bar{c}|_{[a,b]} = c$  et  $c(t+b-a) = c(t)$  pour tout  $t$ . La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

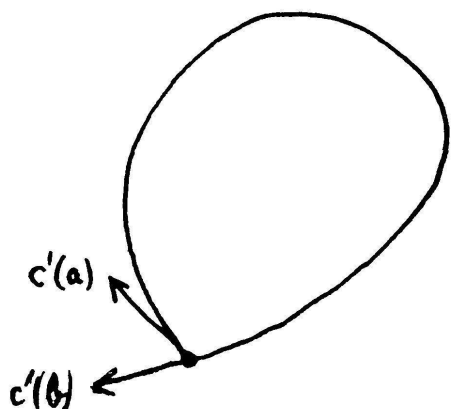


Fig. 1

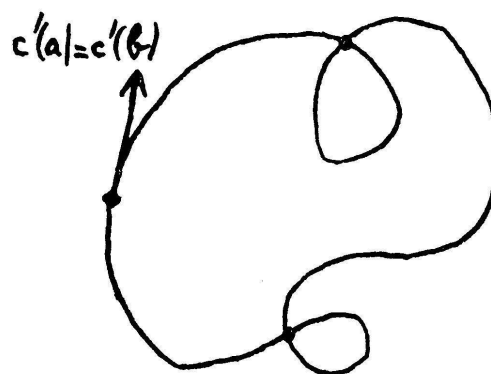


Fig. 2

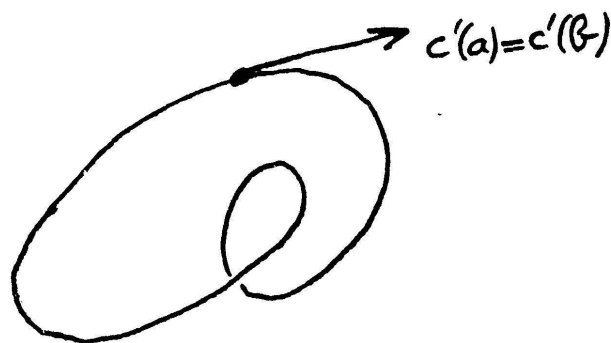


Fig. 3

Pour une v.r.  $(M, g)$  on introduit les trois assertions:

(10.2): « GPS ( $m$ ) »:  $\forall x \in T_m M, x \neq 0$ , la géodésique  $c$  telle que  $c'(0) = x$  est périodique, simple et de longueur  $\pi$ ;