**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 16 (1970)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.

**Kapitel:** 8. Définition.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-43854

tout cas, que si $M$, $N$ sont deux variétés compactes, et si $\alpha$ (resp. $\beta$) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente $M$ (resp. $N$), alors on n'a pas en général: $\mathrm{vol}(M \times N, g) \geqq \alpha(g) \,.\, \beta(g)$ pour toute $g$. Voir aussi [11′].

## Géodésiques.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. $(M, g)$ posons, pour deux points $m, n \in M$:

**(8.1)** $$d(m, n) = \inf_c \mathrm{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités $m$, $n$).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que $d$ est une distance sur $M$; ainsi $(M, g)$ est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de $M$ coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de $(M, g)$ sont les courbes de classe $C^1$ qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ ($I$ intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I \,\exists\, t' > t$, $t' \in I$, tel que $\mathrm{long}(c|_{[t,t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à $S$.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si $(M, g)$ est complète:

**(8.2)** $\forall\, m, n \in M \,\exists\, c$, courbe d'extrémités $m, n$, telle que $\mathrm{long}(c, g) = d(m, n)$;

**(8.3)** $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique $c$: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'(0) = x$.

*Remarques :*

**(8.4)**: la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur $(S^n, g_0)$ deux points $m$, $n$ antipodes. Par contre on démontre

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si $m$, $n$ sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longeur $d(m, n)$) est *unique*.
(**8.5**): les géodésiques sont invariantes par isométries: si $f : (M, g) \to (N, h)$ est une isométrie et $c$ une géodésique de $(N, h)$, alors $f \circ c$ est une géodésique de $(M, g)$.

9. *Exemples de géodésiques.*

(**9.1**): *les géodésiques de* $(S^n, g_0)$ *sont les grands cercles* (parcourus uniformément.

En effet, soit $c$ une géodésique de $(S^n, g_0)$ et $m$, $n$ deux points de $c$ assez voisins pour vérifier (8.4). Soit $P$ le sous-espace vectoriel de dimensions deux de $\mathbf{R}^{n+1}$ déterminé par $m$ et $n$, $C$ le grand cercle $P \cap S^n$ et $s$ la symétrie euclidienne par rapport à $P$ et restreinte à $S^n$. Les seuls points fixes de $s$ sont les points de $C$. Comme $s$ est une isométrie de $(S^n, g_0)$ elle transforme la restriction $\bar{c}$ de $c$ de $m$ à $n$ en une géodésique $s \circ \bar{c}$ (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc $s \circ \bar{c} = \bar{c}$, donc $\bar{c} \subset C$. En particulier:

(**9.2**): les géodésiques de $(S^n, g_0)$ sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur $2\pi$.

On va voir en fait que les géodésiques des $(P_i^n, g_0)$ ont les mêmes propriétés.

(**9.3**): *géodésiques des submersions riemanniennes.*

Soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(**9.4**): si $c$ est une géodésique de $(M, g)$ telle que $c'(0) \in H_{c(0)}$, alors $c$ est horizontale (voir (3.6));

(**9.5**): si $c$ est une telle géodésique horizontale de $(M, g)$, alors $p \circ c$ est une géodésique de $(N, h)$.

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de $(N, h)$ par projection des géodésiques horizontales de $(M, g)$).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit $c$ une géodésique de $(N, h)$ et $m$, $n$ deux points de $c$ assez voisins pour vérifier (8.4). Soit $\tilde{c}$ un relèvement horizontal dè $c$ et $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ les relèvements de $m$, $n$. Soit $d$ *la* plus courte géodésique de $\tilde{m}$ à $\tilde{n}$ (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\operatorname{long}(p \circ d) \leqq \operatorname{long}(d) \leqq \operatorname{long}(\tilde{c}) = \operatorname{long}(c) = d(m, n).$$

Comme $p \circ d$ est d'extrémités $m$, $n$ c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.