

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU  
DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES  
COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.  
**Kapitel:** GÉODÉSIQUES.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

tout cas, que si  $M, N$  sont deux variétés compactes, et si  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est la classe d'homotopie de  $M \times N$  qui représente  $M$  (resp.  $N$ ), alors on n'a pas en général:  $\text{vol}(M \times N, g) \geq \alpha(g) \cdot \beta(g)$  pour toute  $g$ . Voir aussi [11].

## GÉODÉSQUES.

### 8. Définition.

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r.  $(M, g)$  posons, pour deux points  $m, n \in M$ :

$$(8.1) \quad d(m, n) = \inf_c \text{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités  $m, n$ ).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que  $d$  est une distance sur  $M$ ; ainsi  $(M, g)$  est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de  $M$  coïncide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de  $(M, g)$  sont les courbes de classe  $C^1$  qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e.  $c: I \rightarrow M$  ( $I$  intervalle de  $\mathbf{R}$ ) est une géodésique si  $|c'|$  est constante et si  $\forall t \in I \exists t' > t, t' \in I$ , tel que  $\text{long}(c|_{[t, t']}, g) = d(c(t), c(t'))$ .

Pour  $(\mathbf{R}^n, g_0)$  les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface  $S \subset \mathbf{R}^3$ , ce sont les courbes dont l'accélération est normale à  $S$ .

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si  $(M, g)$  est complète:

$$(8.2) \quad \forall m, n \in M \exists c, \text{ courbe d'extrémités } m, n, \text{ telle que } \text{long}(c, g) = d(m, n);$$

$$(8.3) \quad \forall x \in TM \text{ il existe une géodésique unique } c: \mathbf{R} \rightarrow M \text{ telle que } c'(0) = x.$$

*Remarques :*

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur  $(S^n, g_0)$  deux points  $m, n$  antipodes. Par contre on démontre

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si  $m, n$  sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longueur  $d(m, n)$ ) est *unique*.

(8.5): les géodésiques sont invariantes par isométries: si  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  est une isométrie et  $c$  une géodésique de  $(N, h)$ , alors  $f \circ c$  est une géodésique de  $(M, g)$ .

## 9. Exemples de géodésiques.

(9.1): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont les grands cercles (parcourus uniformément).

En effet, soit  $c$  une géodésique de  $(S^n, g_0)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de dimensions deux de  $\mathbf{R}^{n+1}$  déterminé par  $m$  et  $n$ ,  $C$  le grand cercle  $P \cap S^n$  et  $s$  la symétrie euclidienne par rapport à  $P$  et restreinte à  $S^n$ . Les seuls points fixes de  $s$  sont les points de  $C$ . Comme  $s$  est une isométrie de  $(S^n, g_0)$  elle transforme la restriction  $\bar{c}$  de  $c$  de  $m$  à  $n$  en une géodésique  $s \circ \bar{c}$  (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc  $s \circ \bar{c} = \bar{c}$ , donc  $\bar{c} \subset C$ . En particulier:

(9.2): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur  $2\pi$ .

On va voir en fait que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  ont les mêmes propriétés.

(9.3): géodésiques des submersions riemanniennes.

Soit  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(9.4): si  $c$  est une géodésique de  $(M, g)$  telle que  $c'(0) \in H_{c(0)}$ , alors  $c$  est horizontale (voir (3.6));

(9.5): si  $c$  est une telle géodésique horizontale de  $(M, g)$ , alors  $p \circ c$  est une géodésique de  $(N, h)$ .

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de  $(N, h)$  par projection des géodésiques horizontales de  $(M, g)$ ).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit  $c$  une géodésique de  $(N, h)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $\tilde{c}$  un relèvement horizontal de  $c$  et  $\tilde{m}, \tilde{n}$  les relèvements de  $m, n$ . Soit  $d$  la plus courte géodésique de  $\tilde{m}$  à  $\tilde{n}$  (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\text{long}(p \circ d) \leq \text{long}(d) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = d(m, n).$$

Comme  $p \circ d$  est d'extrémités  $m, n$  c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.

(9.6): géodésiques des  $P_i^n$  ( $i=1, 2, 4$ ).

Considérant les submersions riemanniennes (2.9), on voit que (9.5) montre que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont les projections des géodésiques horizontales (pour la submersion considérée) de  $S^{in+i-1}$ . Il suffit donc de savoir comment se projettent les grands cercles horizontaux de  $S^{in+i-1}$  sur  $P_i^n$ . On voit d'abord que les grands cercles de  $S^{in+i-1}$  revêtent tous deux fois les géodésiques de  $(P_i^n, g_0)$ , parce que  $p(-m) = p(m)$  pour tout  $m \in S^{in+i-1}$ . Donc:

(9.7): les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples, périodiques et de longueur  $\pi$ .

Pour se faire une idée de la géométrie des  $P_i^n$  ( $i=0, 1, 2, 4$ ), il faut encore savoir comment se rencontrent deux géodésiques  $c, d$  issues d'un  $m = c(0) = d(0)$ . Pour  $(S^n, g_0)$ , elles se rencontrent exactement à la distance  $\pi$  en l'antipode de  $m$ , puis de nouveau en  $m$  au temps  $2\pi$  (et c'est tout!). On en déduit que pour  $(P_1^n, g_0)$ , revêtu deux fois par  $(S^n, g_0)$ , les géodésiques issues d'un  $m \in P_1^n$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  (ce sont les droites projectives passant par  $m$ ). Le milieu (situé à une distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ ) de ces géodésiques de  $P_1^n$  passant par  $m$  décrit l'hyperplan projectif dual de  $m$ , dans la dualité associée à la structure euclidienne de  $K^{n+1}$ .

Pour les  $P_i^n$  ( $i=2, 4$ ), on note d'abord que  $T_m P_i^n$  est un  $K$ -espace vectoriel. La relation d'équivalence sur  $K^{n+1} - \{0\}$ , qui donne naissance à  $P_i^n$  montre que ([1], p. 130)  $c$  et  $d$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  si  $d'(0) \notin K \cdot c'(0)$ . Si par contre  $d'(0) \in K \cdot c'(0)$ , alors  $c$  et  $d$  se rencontrent en plus seulement en leur point à distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ . En outre, lorsque  $d'(0)$  parcourt  $K \cdot c'(0)$ , les géodésiques correspondantes forment une sphère de dimension  $i$  de  $P_i^n$ , sphère qui n'est autre qu'une droite projective. Et lorsque ces différentes  $i$ -sphères-droites projectives passant par  $m$  remplissent  $P_i^n$ , les antipodes de  $m$  sur ces sphères décrivent l'hyperplan projectif dual de  $m$  (pour la structure hermitienne de  $K^{n+1}$ ), hyperplan qui est une sous-variété de dimension réelle  $i(n-1)$  de  $P_i^n$ . On notera aussi que ces droites projectives (resp. hyperplans projectifs) sont isométriques (comme sous-variété de  $(P_i^n, g_0)$ ) aux  $(S^i, \frac{1}{2}g_0)$  (resp.  $(P_i^{n-1}, g_0)$ ) (ce sont même des sous-variétés totalement géodésiques).

(9.8): le cas de  $(P_8^2, g_0)$ .

Pour étudier les géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$ , il faut (voir (2.7)) utiliser la technique des espaces symétriques; on trouvera dans [11], p. 356 et surtout



dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$  est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  ( $i=1, 2, 4$ ), en prenant  $K = \mathbf{Ca}$  et  $i = 8$ .

### 10. Géodésiques périodiques.

(10.1): *définition*: une géodésique  $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$  est dite périodique (ou fermée) si  $c$  est non constante et si  $c'(a) = c'(b)$ . Elle est dite en outre simple si  $c|_{[a,b[}$  est injective.

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que  $c$  se prolonge en une géodésique  $\bar{c} : \mathbf{R} \rightarrow M$  telle que  $\bar{c}|_{[a,b]} = c$  et  $c(t+b-a) = c(t)$  pour tout  $t$ . La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

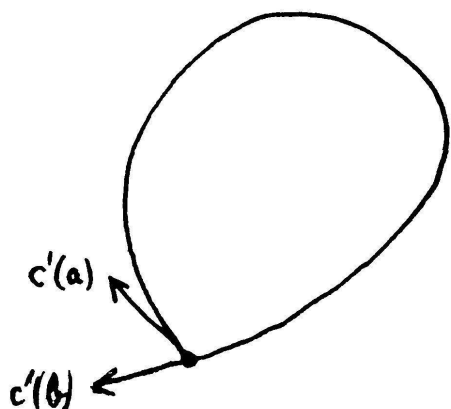


Fig. 1

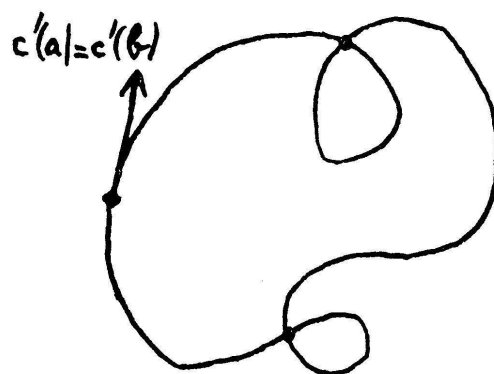


Fig. 2

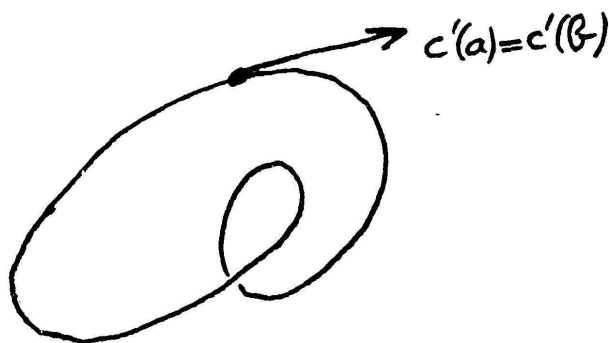


Fig. 3

Pour une v.r.  $(M, g)$  on introduit les trois assertions:

(10.2): « GPS ( $m$ ) »:  $\forall x \in T_m M, x \neq 0$ , la géodésique  $c$  telle que  $c'(0) = x$  est périodique, simple et de longueur  $\pi$ ;

(10.3): « GPS »:  $\exists m \in M$  tel que « GPS ( $m$ ) »;

(10.4): « TGPS »:  $\forall m \in M$  on a « GPS ( $m$ ) ».

Exemple: les  $(S^n, \frac{1}{2}g_0)$  et les  $(P_i^n, g_0)$  ( $i=1, 2, 4, 8$ ) vérifient « TGPS ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes:  
(i): dans quelle mesure « GPS » ou « TGPS » caractérisent-elles les  $(P_i^n, g_0)$ ? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

## 11. Variétés telles que « GPS ».

On peut seulement espérer au plus que « GPS » caractérisent les variétés différentiables  $P_i^n$ . En effet, soit  $m$  le pôle nord de  $S^n$  et  $G$  son groupe d'isotropie, c'est-à-dire  $G = \{s \in SO(n+1): s(m) = m\}$  ( $G$  est canoniquement isomorphe à  $SO(n)$ ). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur  $S^n$  qui est invariante par  $G$  (i.e. toutes les actions de  $G$  sont des isométries), on a « GPS ( $m$ ) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de  $m$  sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à  $g_0$ .

Actuellement, d'une part on ne connaît pas d'autres variétés que les  $P_i^n$  à posséder une s.r. telle que « GPS ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel  $H^*(.; \mathbb{Z})$  représente l'anneau de cohomologie entière: (11.1): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit  $(M, g)$  telle que « GPS ».* Alors  $\exists n$  et  $\exists i$  tels que  $H^*(M; \mathbb{Z})$  soit isomorphe en tant qu'anneau à  $H^*(P_i^n; \mathbb{Z})$ .

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés  $M$ , non homéomorphes à  $P_4^2$ , mais cependant telles que  $H^*(M; \mathbb{Z})$  et  $H^*(P_4^2; \mathbb{Z})$  soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces  $M$ , une s.r. telle que « GPS ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « GPS » assure ceci: il existe une filtration convenable de  $\Omega \cdot (M)$ , l'espace des lacets à point base de  $M$ , par des sous-espaces  $\Omega_i(M)$ , filtration telle que les nombres de Betti relatifs  $b_k(\Omega_{i+1}(M), \Omega_i(M))$  soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement  $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbb{Z})$  (à l'aide d'un seul entier encore inconnu  $i$ ). De  $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbb{Z})$  on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à  $H^*(M; \mathbb{Z})$ , dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré  $i$ . Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour  $i = 0, 1, 2, 4$  et  $n$  quelconque ou si  $i = 8$  pour  $n = 1, 2$  (où  $\dim M = ni$ ). C.Q.F.D.

## 12. Variétés telles que « TGPS ».

Un exemple surprenant est la surface de Zoll:

(12.1): *théorème (Zoll, [16]): sur  $S^2$  il existe des s.r.  $g$  telles que « TGPS » et que  $(S^2, g)$  ne soit pas isométrique à  $(S^2, g_0)$ .*

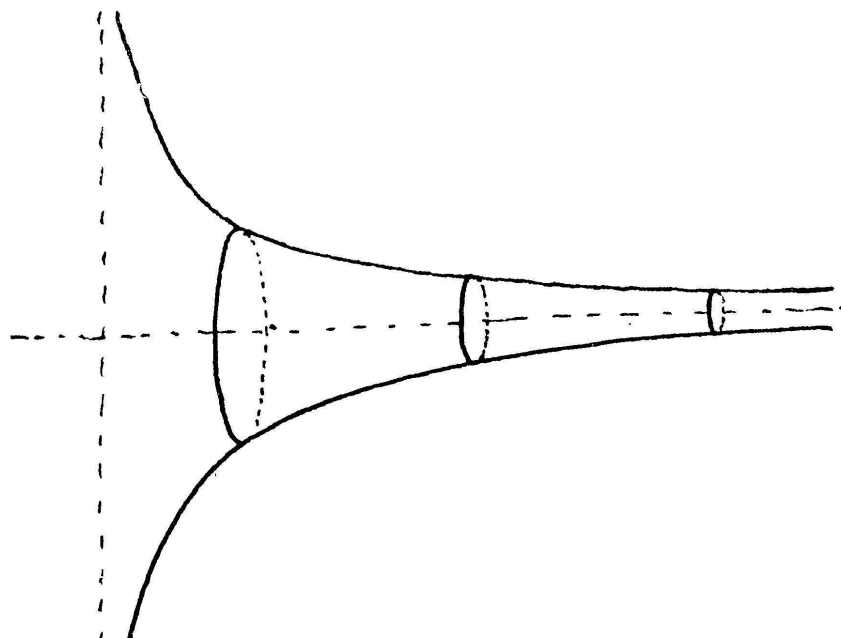
Ainsi « TGPS » n'est pas caractéristique des  $(P_i^n, g_0)$  en toute généralité. D'ailleurs (communication de A. Weinstein) on peut construire des s.r. analogues sur les  $S^n \forall n \geq 2$ . Cependant « TGPS » caractérise  $(P_1^2, g_0)$ :

(12.2): *théorème (Green, [9]): si  $(P_1^2, g_0)$  est telle que « TGPS », alors  $(P_1^2, g)$  est isométrique à  $(P_1^2, g_0)$ .*

Toutes les généralisations possibles de (12.2), pour différents  $n$  et  $i$ , sont des problèmes entièrement ouverts. La démonstration de (12.2) est absolument particulière à la dimension deux; elle utilise, pour  $(P_1^2, g)$ , deux inégalités en sens contraire; la première est basée sur la formule de Gauss-Bonnet en dimension deux et une inégalité dont l'extension en dimension plus grande ne correspond plus à la formule de Gauss-Bonnet. La deuxième inégalité utilise une formule de géométrie intégrale de Santalo dont l'extension en dimension plus grande ne fonctionne que si le projectif  $(P_1^n, g)$  (pour lequel on voudrait démontrer une généralisation du théorème (12.2)) possédait une hypersurface homotope à  $P_1^{n-1}$  et totalement géodésique, ce qui n'est pas le cas en général.

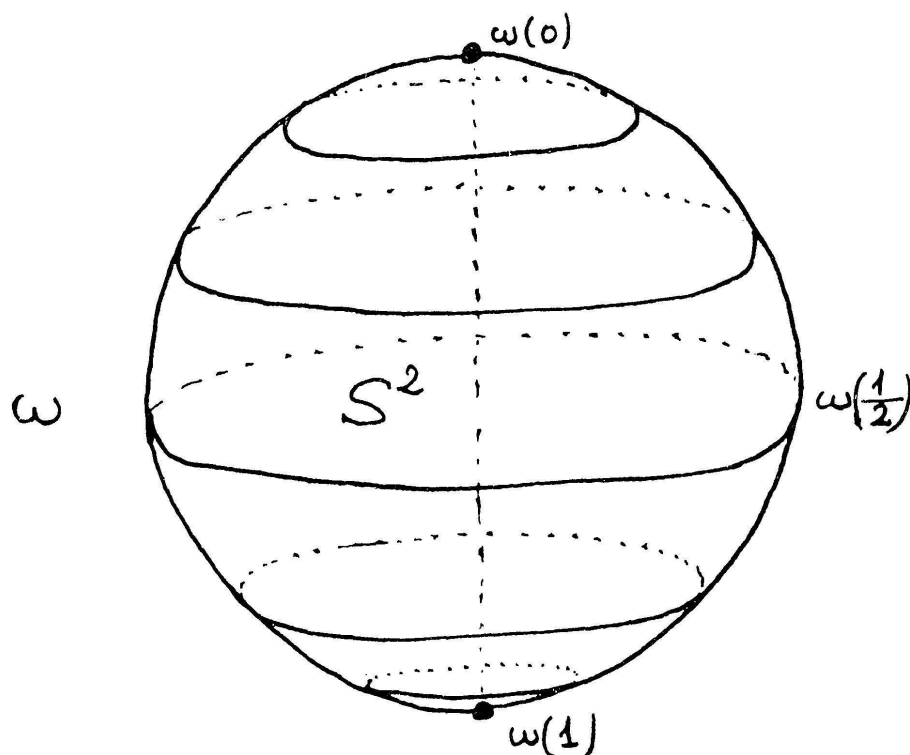
## 13. Existence d'une géodésique périodique.

Une variété complète, non compacte, même non simplement connexe, n'admet pas nécessairement de géodésique périodique (g.p.); exemple la surface de révolution ci-après:



Un théorème folklorique est le:

(13.1): soit  $(M, g)$  compacte. Alors, quelle que soit la classe d'homotopie libre  $\alpha$  (voir (7.4)) de  $M$ ,  $\alpha \neq 0$ , il existe une g.p.  $c \in \alpha$ . En particulier si  $M$  est non simplement connexe compacte, elle admet toujours une g.p.



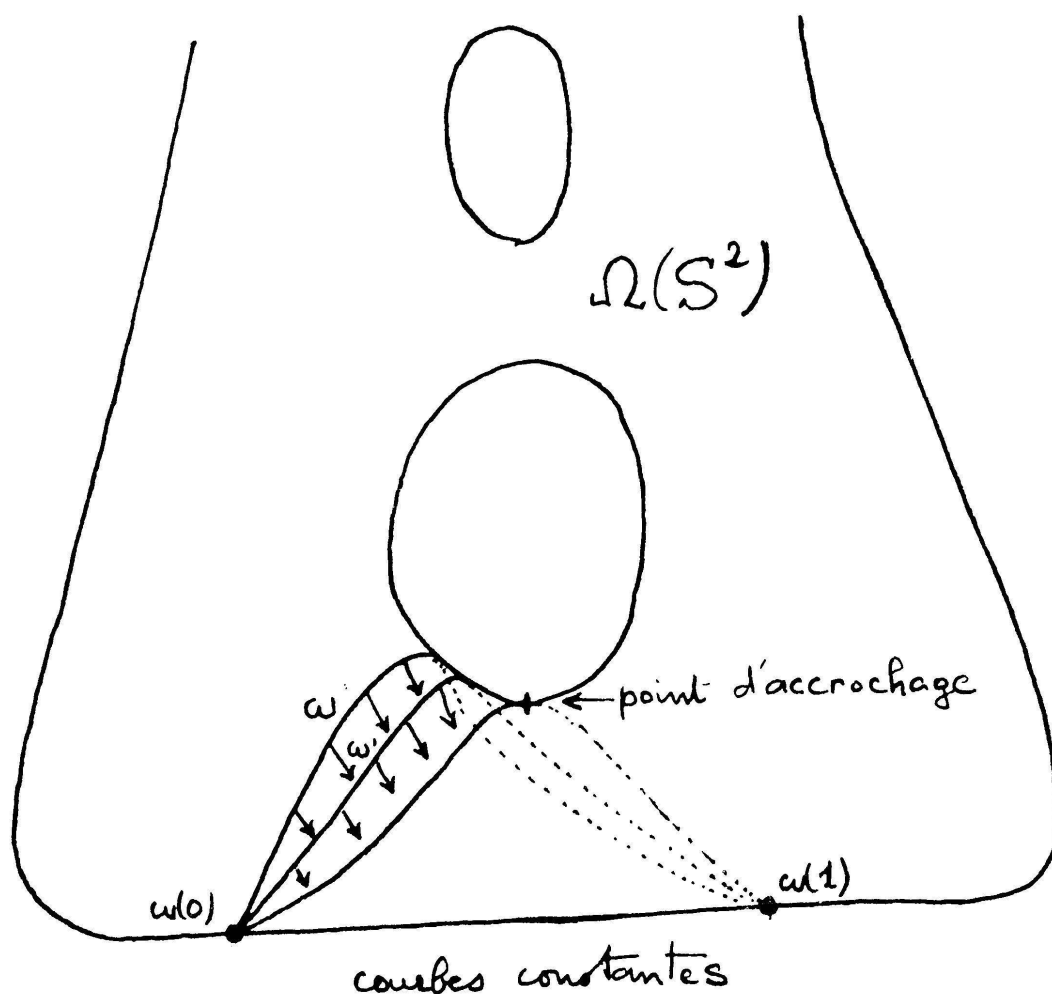
La démonstration est simple; on montre que la borne inférieure  $\alpha(g) = \inf_{c \in \alpha} \text{long}(c, g)$  est réalisée, parce que  $M$  est compacte; et une courbe réalisant cette borne inférieure est nécessairement une g.p.

Par contre, si  $M$ , toujours compacte, est simplement connexe, la question de l'existence d'au moins une g.p. est beaucoup plus difficile. Poincaré fut le premier à démontrer une telle existence en 1905, pour  $(S^2, g)$  avec  $g$  analytique (Birkhoff étendit ce résultat à  $S^n$ ,  $g$  toujours analytique, en 1927). Mais il fallut attendre jusqu'en 1952 pour le:

(13.2): *théorème (Fet-Lyusternik): toute v.r. compacte admet une g.p.*

La démonstration est un usage typique de la théorie de Morse. Cette démonstration consiste à mettre en forme l'idée suivante, que nous présentons sur  $S^2$ . Soit  $\Omega(S^2) = C^0(S^1; S^2)$  l'espace des courbes fermées

(lacets sans point base) de  $S^2$ . Dans  $\Omega(S^2)$  on considère le chemin  $\omega$ , dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les parallèles de  $S^2$ . Sur  $\Omega(S^2)$  on a la fonction longueur; si  $\omega$  ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins  $\omega'$ , de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, ou on a trouvé une g.p., ou on a déformé  $\omega$  en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque  $\omega$  est précisément un générateur de  $\pi_2(S^2) \neq 0$ . C'est donc que notre chemin  $\omega$  reste « accroché » et le point d'accrochage est précisément une g.p.



#### 14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques.

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes

(des g.p.  $c_1, \dots, c_k$  sont dites *géométriquement distinctes* si les sous-ensembles  $c_1(\mathbf{R}), \dots, c_k(\mathbf{R})$  de  $M$  sont distincts). Nous ne donnons pas le détail de leurs résultats; en effet il est actuellement raisonnable de conjecturer que toute v.r. compacte admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

D'abord, bien sûr, on ne connaît pas de v.r. compacte, de dimension  $\geq 2$ , dont on ait pu montrer qu'elle n'a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes. Ensuite d'une part on dispose maintenant du: (14.1): *théorème* (Gromoll-Meyer, [10]): *soit  $\{b_k(\Omega(M))\}$  la suite des nombres de Betti de l'espace  $\Omega(M) = C^0(S^1; M)$ . Soit  $M$  une variété compacte simplement connexe telle que la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée (i.e.  $\forall a \in \mathbf{N} \exists k$  tel que  $b_k(\Omega(M)) > a$ ). Alors, quelle que soit la s.r. sur  $M$ , la v.r.  $(M, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.*

(Noter que les nombres de Betti  $b_k(\Omega(M))$  pour une variété  $M$  compacte simplement connexe sont tous finis.)

D'autre part, bien que l'on ne sache pas exactement quelles sont les variétés compactes  $M$  pour lesquelles la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée, on a ceci: (i) plusieurs classes assez larges de  $M$  compactes ayant une telle suite non bornée; (ii) les seules variétés simplement connexes connues pour lesquelles cette suite est bornée sont les  $P_i^n$ . Or les  $P_i^n$  ont, à vrai dire pour leur s.r. canonique  $g_0$ , une bonne infinité de g.p. géométriquement distinctes! Remarquer que l'on ne sait pas, même pour des s.r.  $g$  voisines de  $g_0$ , si  $(P_i^n, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

Quant à la démonstration de (14.1), elle est fine et technique. En voici un schéma heuristique, seulement dans le cas « non dégénéré » (le cas dégénéré est cependant essentiel et complique grandement la démonstration). Il faut connaître la théorie de Morse pour les sous-variétés critiques non-dégénérées et pour les variétés de dimension infinie. On procède par l'absurde: s'il n'y a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes, c'est qu'il existe  $k$  géodésiques périodiques simples  $c_1, \dots, c_s$ , telles que toute g.p. soit un recouvrement fini de l'une d'entre elles. A chaque g.p. on associe un index  $k$ ; les inégalités de Morse disent que le nombre de g.p. d'index égal à  $k$  est supérieur ou égal à  $b_k(\Omega(M))$ . Etudiant les index  $k(m)$  d'une g.p. recouvrant  $m$  fois une g.p. donnée, on trouve que  $k(m)$  croît, en gros, comme une progression arithmétique. Ceci montre donc que les  $b_k(\Omega(M))$  sont bornés. C.Q.F.D.