Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant $g$ une s.r. kählérienne sur $P_2^n$ telle que la forme de Kâhler associée $\omega$ vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle $\alpha$ de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f : M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir $g$ par (6.1) à partir de $\omega$. Pour $f$ assez petite, $g$ est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge}\omega$, où $n$ est la dimension complexe. On aura donc:

$$\mathrm{vol}\,(P_2^n, g) = \frac{1}{n!}\int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\,\omega = \frac{1}{n!}\int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\,\omega_0 = \mathrm{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\mathrm{vol}\,(Y, g) \geqq \int_Y \omega\big|_Y = \int_{P_2^1}\omega\big|_{P_2^1} = \int_{P_2^1}\omega_0\big|_{P_2^1} = \mathrm{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc $(P_2^n, g_0)$. D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot $(P_2^n, g_0)$ pour toute $g$ du type précédent; or en général $(P_2^n, g)$ et $(P_2^n, g_0)$ ne seront pas isométriques; ainsi « $IC\,(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot $(P_4^n, g_0)$ (resp. quot $(P_8^2, g_0)$). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de $P_4^n$ (resp. $P_8^2$); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot $(P_4^n, g_0)$ (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3$. (d'après (2.10)); d'où quot $(P_8^2, g_0)$ (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC\,(n;4)$ » ou « $IC\,(2;8)$ ».

## 7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc $(M, g)$ de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

**(7.1)** $$\mathrm{quot}\,(M, g) = \frac{\mathrm{vol}\,(M, g)}{(\mathrm{carc}\,(M, g))^n}\,,\ \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

**(7.2)**: *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* $g$: quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g})$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1).(2p-3)\ldots\ldots 3.1)$

| | $S^n = P_o^n$ | $P_1^2$ | $P_1^n = P^n(\mathbf{R})\ (n \geqslant 3)$ | $P_2^n$ | $P_4^n$ | $P_8^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| vol $(P:; g_0)$ | $n = 2p:\quad 2\,.\,\frac{(2\pi)^p}{p)}$<br>$n = 2p+1:\ 2\,\frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | $2\pi$ | $n = 2p:\quad \frac{(2\pi)^p}{p)}$<br>$n = 2p+1:\ \frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | $\frac{\pi^n}{n!}$ | $\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$ | $\frac{\pi^8}{11.10.9.8.7.6.5.4}$ |
| quot $(P:, g_0)$ | | $\frac{2}{\pi}$ | $n = 2p:\quad \frac{2^p}{p)}$<br>$n = 2p+1:\ \frac{\pi}{p!}$ | $\frac{1}{n!}$ | $\frac{6^n}{(2n+1)!}$ | $\frac{7}{11}$ |
| « $I(.\,;.)$ » | | vraie | ouverte | ouverte | ouverte | ouverte |
| « $IC(.\,;.)$ » | | vraie | ouverte | fausse | ouverte | ouverte |
| « $P(.\,;.)$ » | | vraie | ouverte | ouverte | ouverte | ouverte |

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq$ quot $(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau $G$ de $\mathbf{R}^2$. Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit $G_q$ *la* surface compacte orientable à $q$ trous (ou surface orientable de genre $q$, toutes ces surfaces sont difféomorphes à $G_q$).

**(7.3)**: *théorème* (Blatter, [3]). *Pour tout* q *quelle que soit la* s.r. *sur* $G_q$: quot $(G_q, g) \geqq (t_{2q})^{1/q}$ (*où les* $t_n$ *sont ceux définis par* (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geqq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les $b_q$ sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q}$ quot $(G_q, g)$, mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geqq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$\text{(7.4)} \qquad \forall g\colon \text{quot}\,((S^1)^n, g) \geqq \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot}\,(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques $t_n$ ne sont pas connus, sauf pour $2 \leqq n \leqq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement: [5], corollary, p. 143. Enfin que $t_n$ tend vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit $M$ une variété $C^\infty$ compacte et $\alpha$, $\beta$, ... différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de $M$. Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. $g$ sur $M$:

$$\text{(7.5)} \qquad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}\,(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés $Y$ de $M$ qui appartiennent à la classe $\alpha$ considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété $Y$; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g)$, $\beta(g)$, ..., indépendantes de la s.r. $g$ sur $M$? Le théorème de Pu est relatif au cas où $\alpha$ est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et $\beta$ la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \geqq \frac{2}{\pi}(\beta(g))^2$ pour toute $g$. Le théorème de Loewner montre, en tout cas, que si $M$, $N$ sont deux variétés compactes, et si $\alpha$ (resp. $\beta$) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente $M$ (resp. $N$), alors on n'a pas en général: $\mathrm{vol}(M \times N, g) \geqq \alpha(g) \cdot \beta(g)$ pour toute $g$. Voir aussi [11′].

## GÉODÉSIQUES.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. $(M, g)$ posons, pour deux points $m, n \in M$:

**(8.1)** $$d(m, n) = \inf_c \mathrm{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités $m$, $n$).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que $d$ est une distance sur $M$; ainsi $(M, g)$ est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de $M$ coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de $(M, g)$ sont les courbes de classe $C^1$ qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ ($I$ intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I \,\exists\, t' > t$, $t' \in I$, tel que $\mathrm{long}(c|_{[t,t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à $S$.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si $(M, g)$ est complète:

**(8.2)** $\forall\, m, n \in M \,\exists\, c$, courbe d'extrémités $m, n$, telle que $\mathrm{long}(c, g) = d(m, n)$;

**(8.3)** $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique $c$: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'(0) = x$.

*Remarques :*

**(8.4)**: la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur $(S^n, g_0)$ deux points $m$, $n$ antipodes. Par contre on démontre