

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ce qui démontre (voir (2.10)) que $\text{carc}(P_2^n, g_0) = \pi$, puis $\text{quot}(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kähler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2} \delta \bar{\delta} f$; définir g par (6.1) à partir de ω . Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \wedge^n \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\text{vol}(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega_0 = \text{vol}(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\text{vol}(Y, g) \geq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{carc}(P_2^n, g_0)$$

donc $\text{carc}(P_2^n, g) = \text{carc}(P_2^n, g_0)$. D'où $\text{quot}(P_2^n, g) = \text{quot}(P_2^n, g_0)$ pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « $IC(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer $\text{quot}(P_4^n, g_0)$ (resp. $\text{quot}(P_8^n, g_0)$). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^n); on aura $\text{carc}(P_4^n, g_0) = \text{vol}(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où $\text{quot}(P_4^n, g_0)$ (voir tableau). De même: $\text{carc}(P_8^n, g_0) = \text{vol}(P_8^1, g_0) = \text{vol}(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. (d'après (2.10)); d'où $\text{quot}(P_8^n, g_0)$ (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC(n;4)$ » ou « $IC(2;8)$ ».

7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan $\text{carc}(M, g)$ de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$(7.1) \quad \text{quot}(M, g) = \frac{\text{vol}(M, g)}{(\text{carc}(M, g))^n}, \quad n = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute g : $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; en outre $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $(S^1 \times S^1, g)$ est isométrique à un tore équilatéral (voir (2.4.2)).*

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$)

	$S^n = P_0^n$	P_1^2	$P_1^n = P^n(\mathbf{R}) (n \geq 3)$	P_2^n	P_4^n	P_8^2
$\text{vol}(P;; g_0)$	$n = 2p: 2 \cdot \frac{(2\pi)^p}{p}$ $n = 2p + 1: 2 \cdot \frac{\pi^{p+1}}{p!}$	2π	$n = 2p: \frac{(2\pi)^p}{p}$ $n = 2p + 1: \frac{\pi^{p+1}}{p!}$	$\frac{\pi^n}{n!}$	$\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$	$\frac{\pi^8}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$
$\text{quot}(P; ; g_0)$		$2 \frac{\pi}{\pi}$	$n = 2p: \frac{2^p}{p}$ $n = 2p + 1: \frac{\pi}{p!}$	$1 \frac{1}{n!}$	$\frac{6^n}{(2n+1)!}$	$\frac{7}{11}$
« $I(.; .)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte
« $IC(.; .)$ »		vraie	ouverte	fausse	ouverte	ouverte
« $P(.; .)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \cong \text{quot}(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau G de \mathbf{R}^2 . Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit G_q la surface compacte orientable à q trous (ou surface orientable de genre q , toutes ces surfaces sont difféomorphes à G_q).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). Pour tout q quelle que soit la s.r. sur G_q : $\text{quot}(G_q, g) \cong (t_{2q})^{1/q}$ (où les t_n sont ceux définis par (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les b_q sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q} \text{quot}(G_q, g)$, mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$(7.4) \quad \forall g: \text{quot}((S^1)^n, g) \cong \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot}(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques t_n ne sont pas connus, sauf pour $2 \leq n \leq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement:

[5], corollary, p. 143. Enfin que t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit M une variété C^∞ compacte et α, β, \dots différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de M . Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. g sur M :

$$(7.5) \quad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés Y de M qui appartiennent à la classe α considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété Y ; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g), \beta(g), \dots$, indépendantes de la s.r. g sur M ? Le théorème de Pu est relatif au cas où α est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et β la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \cong \frac{2}{\pi} (\beta(g))^2$ pour toute g . Le théorème de Loewner montre, en

tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\text{vol}(M \times N, g) \cong \alpha(g) \cdot \beta(g)$ pour toute g . Voir aussi [11'].

GÉODÉSQUES.

8. Définition.

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

$$(8.1) \quad d(m, n) = \inf_c \text{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M ; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coïncide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \rightarrow M$ (I intervalle de \mathbf{R}) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall t \in I \exists t' > t, t' \in I$, tel que $\text{long}(c|_{[t, t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour (\mathbf{R}^n, g_0) les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S .

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

$$(8.2) \quad \forall m, n \in M \exists c, \text{ courbe d'extrémités } m, n, \text{ telle que } \text{long}(c, g) = d(m, n);$$

$$(8.3) \quad \forall x \in TM \text{ il existe une géodésique unique } c: \mathbf{R} \rightarrow M \text{ telle que } c'(0) = x.$$

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre