

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU  
DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES  
COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.  
**Kapitel:** 4. Le théorème de Pu.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit  $c : [a, b] \rightarrow M$  une courbe d'une v.r.  $(M, g)$ ; même si  $c([a, b])$  n'est pas une sous-variété de  $M$  on peut définir la longueur de  $c$  par :

$$(3.5) \quad \text{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

*Exemple :* soit  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  une submersion riemannienne; une courbe  $c$  de  $M$  sera dite *horizontale* si  $c'(t) \in H_{c(t)}$  pour tout  $t$ . Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit :

(3.6):  $\text{long}(p \circ c, h) \leq \text{long}(c, g)$ ; en outre  $\text{long}(p \circ c, h) = \text{long}(c, g)$  si et seulement si  $c$  est horizontale.

#### 4. Le théorème de Pu.

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit  $g$  une s.r. sur  $P_1^2$ , le plan projectif réel. A  $(P_1^2, g)$  on peut attacher deux nombres réels, son volume  $\text{vol}(P_1^2, g)$  et son *carcan*,  $\text{carc}(P_1^2, g)$ , égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de  $P_1^2$  non homotopes à zéro :

$$(4.1) \quad \text{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{ non } \sim_0} \text{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si  $\text{carc}(P_1^2, g) \geq k$ , alors  $\text{surf}(P_1^2, g)$  est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de  $k$ . Définissons le *quotient* de  $(P_1^2, g)$  comme le rapport homogène de degré zéro :

$$(4.2) \quad \text{quot}(P_1^2, g) = \frac{\text{surf}(P_1^2, g)}{(\text{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer  $\text{quot}(P_1^2, g_0)$ . Le tableau donne le numérateur; pour  $\text{carc}(P_1^2, g_0)$ , on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de  $(P_1^2, g_0)$  soient les droites projectives!). Donc  $\text{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$  (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le :

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la s.r.  $g$  sur  $P_1^2$ , on a  $\text{quot}(P_1^2, g) \geq \text{quot}(P_1^2, g_0)$ . En outre, si  $\text{quot}(P_1^2, g) = \text{quot}(P_1^2, g_0)$ , alors  $(P_1^2, g)$  et  $(P_1^2, g_0)$  sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4))  $(S^2, \tilde{g})$  de  $(P_1^2, g)$ . D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à  $(S^2, g)$ , il existe

un difféomorphisme  $f: S^2 \rightarrow S^2$  tel que  $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{\alpha} \cdot g_0$ , où  $g_0$  est la s.r. canonique de  $S^2$  et  $\tilde{\alpha}$  une fonction sur  $S^2$ . On peut modifier  $f$  de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme  $f$  de  $P_1^2$  tel que  $f^* g = \alpha \cdot g_0$ ,  $\alpha: P_1^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Les deux v.r.  $(P_1^2, g)$  et  $(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$  sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r.  $g_0$  et  $\alpha \cdot g_0$  sur  $P_1^2$ ; maintenant  $SO(3)$  agit sur  $(P_1^2, g_0)$  par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de  $SO(3)$ , de la fonction  $\alpha^{1/2}$ . Ceci donne une fonction  $\bar{\alpha}$ ; la longueur d'une courbe  $c$  pour  $\bar{\alpha} \cdot g_0$  est la moyenne de la longueur des courbes  $\gamma \circ c$  pour  $\alpha \cdot g_0$ ,  $\gamma$  parcourant  $SO(3)$ ; donc  $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \geq \text{carc}(P_1^2, \alpha \cdot g)$ . L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur  $SO(3)$ ) dit que  $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leq \leq \text{surf}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ . Donc  $\text{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \leq \text{quot}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ . Mais, en fait,  $\bar{\alpha}$  est une constante, puisque  $SO(3)$  agit transitivement sur  $P_1^2$ ; donc  $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = \bar{\alpha} \cdot \text{surf}(P_1^2, g_0)$  et  $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \cdot \text{carc}(P_1^2, g_0)$ . D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

*Remarques:* (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcannique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord  $P_1^2$ ; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de  $P_1^2$ .

### 5. Généralisations possibles.

Pour  $n$  quelconque, on peut définir  $\text{carc}(P_1^n, g)$  exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$(5.1) \quad \text{quot}(P_1^n, g) = \frac{\text{vol}(P_1^n, g)}{(\text{carc}(P_1^n, g))^n}.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si  $\text{quot}(P_1^n, g) \geq \text{quot}(P_1^n, g_0)$  pour toute  $g$  (pour les variations conformes  $\alpha \cdot g_0$ , c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de  $g_0$ . En fait on ne sait même pas si la borne inférieure  $\inf_g \text{quot}(P_1^n, g)$ , pour  $g$  parcourant toutes les s.r. sur  $P_1^n$ , est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux  $P_i^n$ . Remarquons pour ce faire que, dans  $P_1^n$ , dire qu'une courbe  $c$  n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à  $P_1^1$ , la droite projective pour l'inclusion héréditaire  $P_1^1 \subset P_1^n$ . On a aussi des inclusions  $P_i^1 \subset P_i^n$  pour tout  $i$ . Posons donc: