Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 3. Définitions,

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes: $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n)\times U(1)$, $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$. Comme les groupes d'isotropie H agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(**2.7**): *le plan projectif des octaves de Cayley* ($P^2(\mathbf{Ca})$, g_0).

L'espace $P^2(\mathbf{Ca})$, peut être défini comme l'espace homogène $F_4/\text{Spin}\,(9)$ (voir [8]); Spin (9) agit de façon irréductible d'où, sur $P^2(\mathbf{Ca})$ une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur π, voir (9.8)): $(P^2(\mathbf{Ca}), g_0)$.

Nous poserons, pour tout n:

(**2.8**): $P_o^n = S^n$, $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$, $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$, $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$, $P_8^2 = P^2(\mathbf{Ca})$;

Ainsi que $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ et $i = dim_{\mathbf{R}}\, K$. Noter que $dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i\,.\,n$. On aura donc les submersions riemanniennes:

(**2.9**): $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{p} (P_i^n, g_0)$, $\qquad i = 1, 2, 4.$

On rappelle les difféomorphismes entre P_i^1 et S^i (i=1, 2, 4, 8). En fait on a même des isométries entre

(**2.10**): (P_i^1, g_0) et $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$, $\qquad i = 1, 2, 4, 8.$

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les P_i^n se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces (P_i^n, g_0) vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

Volumes, Surfaces, Longueur

3. *Définitions.*

Le fait simple et fondamental est:

(**3.1**): *une* v.r. (,M g) *admet une mesure canonique*, v_g.

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour $\mathbf{R}^n$), et comme (M, g) est partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit n la dimension de cet espace E; il existe alors sur E une n-forme alternée canonique, ω; elle vaut $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$ sur toute base orthonormée directe $\{e_i\}$ de E (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver ω en remarquant que $\overset{n}{\wedge} E$, d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour E; c'est ω. Soit (M, g) une variété riemannienne, U un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur U. D'après ce qui précède il existe sur U une n-forme canonique (n=*dim* M) $m \mapsto \omega_m$. Pour $f : M \to \mathbf{R}$ à support dans U on pose $\int_M f v_g = \int_U f\omega$, au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur $\int_U f\omega$ ne change pas si l'on change l'orientation de U, puis que v_g se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): *soit* (M, g) *une* v.r. *compacte. Le* volume *de* (M, g) *est* vol (M, g) = $= \int_M v_g$, *c'est-à-dire la masse totale de* (M, g) *pour sa mesure canonique; si* dim M = 1, *on dit* longueur *et écrit* long (M, g), *si* dim M = 2, *on dit* surface *et écrit* surf (M, g).

On peut calculer explicitement vol (P_i^n, g_0) pour tous n, i: voir le tableau. Pour S^n, c'est un vieux résultat. On passe de là à P_1^n, revêtu à deux feuillets par S^n, en divisant par deux.

Par trivialisation locale et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): *soit* (M, g) $\xrightarrow{p}$ (N, h) *une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons* M compacte. *Alors*

$$\mathrm{vol}\,(M, g) = \int_{n \in N} \mathrm{vol}\,(p^{-1}(n), g) \,.\, v_h.$$

Appliquons ceci à P_2^n (resp. P_4^n), pour g_0 bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à 2π (resp. égal à $2\pi^2$, voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour (P_8^2, g_0), il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si $N \subset M$ est une sous-variété de (M, g), on posera (voir (2.3)):

(3.4) $\quad$ $\mathrm{vol}\,(N, g) = \mathrm{vol}\,(N, g|_N)$.

Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe d'une v.r. (M, g); même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par:

$$(3.5) \qquad \operatorname{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t. Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit:

(3.6): $\operatorname{long}(p \circ c, h) \leqq \operatorname{long}(c, g)$; en outre $\operatorname{long}(p \circ c, h) = \operatorname{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. *Le théorème de Pu.*

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2, le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\operatorname{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\operatorname{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro:

$$(4.1) \qquad \operatorname{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{non} \sim 0} \operatorname{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\operatorname{carc}(P_1^2, g) \geqq k$, alors $\operatorname{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k. Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro:

$$(4.2) \qquad \operatorname{quot}(P_1^2, g) = \frac{\operatorname{surf}(P_1^2, g)}{(\operatorname{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\operatorname{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le:

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la* s.r. g *sur* P_1^2, *on a* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) \geqq \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. *En outre, si* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) = \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$, *alors* (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) *sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) $(S^2, \tilde{g})$ de (P_1^2, g). D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g), il existe