

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU
DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES
COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.
Kapitel: 3. Définitions,
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes: $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$, $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$. Comme les groupes d'isotropie H agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(2.7): *le plan projectif des octaves de Cayley* ($P^2(\mathbf{Ca})$, g_0).

L'espace $P^2(\mathbf{Ca})$, peut être défini comme l'espace homogène $F_4/\text{Spin}(9)$ (voir [8]); $\text{Spin}(9)$ agit de façon irréductible d'où, sur $P^2(\mathbf{Ca})$ une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur π , voir (9.8)): ($P^2(\mathbf{Ca})$, g_0).

Nous poserons, pour tout n :

(2.8): $P_0^n = S^n$, $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$, $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$, $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$, $P_8^n = P^2(\mathbf{Ca})$;

Ainsi que $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ et $i = \dim_{\mathbf{R}} K$. Noter que $\dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i \cdot n$. On aura donc les submersions riemanniennes:

(2.9): $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0)$, $i = 1, 2, 4$.

On rappelle les difféomorphismes entre P_i^1 et S^i ($i=1, 2, 4, 8$). En fait on a même des isométries entre

(2.10): (P_i^1, g_0) et $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$, $i = 1, 2, 4, 8$.

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les P_i^n se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces (P_i^n, g_0) vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

VOLUMES, SURFACES, LONGUEUR

3. Définitions.

Le fait simple et fondamental est:

(3.1): une v.r. (M, g) admet une mesure canonique, v_g .

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour \mathbf{R}^n), et comme (M, g) est

partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit n la dimension de cet espace E ; il existe alors sur E une n -forme alternée canonique, ω ; elle vaut $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ sur toute base ortho-normée directe $\{e_i\}$ de E (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver ω en remarquant que $\wedge^n E$, d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour E ; c'est ω . Soit (M, g) une variété riemannienne, U un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur U . D'après ce qui précède il existe sur U une n -forme canonique ($n = \dim M$) $m \mapsto \omega_m$. Pour $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ à support dans U on pose $\int_M f v_g = \int_U f \omega$, au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur $\int_U f \omega$ ne change pas si l'on change l'orientation de U , puis que v_g se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): soit (M, g) une v.r. compacte. Le volume de (M, g) est $\text{vol}(M, g) = \int_M v_g$, c'est-à-dire la masse totale de (M, g) pour sa mesure canonique; si $\dim M = 1$, on dit longueur et écrit $\text{long}(M, g)$, si $\dim M = 2$, on dit surface et écrit $\text{surf}(M, g)$.

On peut calculer explicitement $\text{vol}(P_i^n, g_0)$ pour tous n, i : voir le tableau. Pour S^n , c'est un vieux résultat. On passe de là à P_1^n , revêtu à deux feuillets par S^n , en divisant par deux.

Par trivialisation locale et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons M compacte. Alors

$$\text{vol}(M, g) = \int_{n \in N} \text{vol}(p^{-1}(n), g) \cdot v_h.$$

Appliquons ceci à P_2^n (resp. P_4^n), pour g_0 bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à 2π (resp. égal à $2\pi^2$, voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour (P_8^2, g_0) , il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si $N \subset M$ est une sous-variété de (M, g) , on posera (voir (2.3)):

$$(3.4) \quad \text{vol}(N, g) = \text{vol}(N, g|_N).$$

Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe d'une v.r. (M, g) ; même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par :

$$(3.5) \quad \text{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t . Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit :

(3.6): $\text{long}(p \circ c, h) \leq \text{long}(c, g)$; en outre $\text{long}(p \circ c, h) = \text{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. Le théorème de Pu.

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2 , le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\text{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\text{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro :

$$(4.1) \quad \text{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{ non } \sim_0} \text{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\text{carc}(P_1^2, g) \geq k$, alors $\text{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k . Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro :

$$(4.2) \quad \text{quot}(P_1^2, g) = \frac{\text{surf}(P_1^2, g)}{(\text{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\text{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\text{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\text{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le :

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la s.r. g sur P_1^2 , on a $\text{quot}(P_1^2, g) \geq \text{quot}(P_1^2, g_0)$. En outre, si $\text{quot}(P_1^2, g) = \text{quot}(P_1^2, g_0)$, alors (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) (S^2, \tilde{g}) de (P_1^2, g) . D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g) , il existe