

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: Volumes, Surfaces, Longueur

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes: $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$, $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$. Comme les groupes d'isotropie H agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(2.7): *le plan projectif des octaves de Cayley* ($P^2(\mathbf{Ca})$, g_0).

L'espace $P^2(\mathbf{Ca})$, peut être défini comme l'espace homogène $F_4/Spin(9)$ (voir [8]); $Spin(9)$ agit de façon irréductible d'où, sur $P^2(\mathbf{Ca})$ une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur π , voir (9.8)): ($P^2(\mathbf{Ca})$, g_0).

Nous poserons, pour tout n :

(2.8): $P_0^n = S^n$, $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$, $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$, $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$, $P_8^n = P^2(\mathbf{Ca})$;

Ainsi que $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ et $i = \dim_{\mathbf{R}} K$. Noter que $\dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i \cdot n$. On aura donc les submersions riemanniennes:

(2.9): $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0)$, $i = 1, 2, 4$.

On rappelle les difféomorphismes entre P_i^1 et S^i ($i=1, 2, 4, 8$). En fait on a même des isométries entre

(2.10): (P_i^1, g_0) et $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$, $i = 1, 2, 4, 8$.

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les P_i^n se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces (P_i^n, g_0) vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

VOLUMES, SURFACES, LONGUEUR

3. Définitions.

Le fait simple et fondamental est:

(3.1): *une v.r. (M, g) admet une mesure canonique, v_g .*

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour \mathbf{R}^n), et comme (M, g) est

partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit n la dimension de cet espace E ; il existe alors sur E une n -forme alternée canonique, ω ; elle vaut $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ sur toute base ortho-normée directe $\{e_i\}$ de E (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver ω en remarquant que $\wedge^n E$, d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour E ; c'est ω . Soit (M, g) une variété riemannienne, U un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur U . D'après ce qui précède il existe sur U une n -forme canonique ($n = \dim M$) $m \mapsto \omega_m$. Pour $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ à support dans U on pose $\int_M f v_g = \int_U f \omega$, au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur $\int_U f \omega$ ne change pas si l'on change l'orientation de U , puis que v_g se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): soit (M, g) une v.r. compacte. Le volume de (M, g) est $\text{vol}(M, g) = \int_M v_g$, c'est-à-dire la masse totale de (M, g) pour sa mesure canonique; si $\dim M = 1$, on dit longueur et écrit $\text{long}(M, g)$, si $\dim M = 2$, on dit surface et écrit $\text{surf}(M, g)$.

On peut calculer explicitement $\text{vol}(P_i^n, g_0)$ pour tous n, i : voir le tableau. Pour S^n , c'est un vieux résultat. On passe de là à P_1^n , revêtu à deux feuilletés par S^n , en divisant par deux.

Par trivialisations locales et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons M compacte. Alors

$$\text{vol}(M, g) = \int_{n \in N} \text{vol}(p^{-1}(n), g) \cdot v_h.$$

Appliquons ceci à P_2^n (resp. P_4^n), pour g_0 bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à 2π (resp. égal à $2\pi^2$, voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour (P_8^2, g_0) , il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si $N \subset M$ est une sous-variété de (M, g) , on posera (voir (2.3)):

(3.4) $\text{vol}(N, g) = \text{vol}(N, g|_N).$

Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe d'une v.r. (M, g) ; même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par :

$$(3.5) \quad \text{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t . Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit :

(3.6): $\text{long}(p \circ c, h) \leq \text{long}(c, g)$; en outre $\text{long}(p \circ c, h) = \text{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. Le théorème de Pu.

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2 , le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\text{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\text{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro :

$$(4.1) \quad \text{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{ non } \sim_0} \text{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\text{carc}(P_1^2, g) \geq k$, alors $\text{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k . Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro :

$$(4.2) \quad \text{quot}(P_1^2, g) = \frac{\text{surf}(P_1^2, g)}{(\text{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\text{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\text{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\text{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le :

(4.3): *théorème (Pu, [14]). Quel que soit la s.r. g sur P_1^2 , on a $\text{quot}(P_1^2, g) \geq \text{quot}(P_1^2, g_0)$. En outre, si $\text{quot}(P_1^2, g) = \text{quot}(P_1^2, g_0)$, alors (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) (S^2, \tilde{g}) de (P_1^2, g) . D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, \tilde{g}) , il existe

un difféomorphisme $f : S^2 \rightarrow S^2$ tel que $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{\alpha} \cdot g_0$, où g_0 est la s.r. canonique de S^2 et $\tilde{\alpha}$ une fonction sur S^2 . On peut modifier f de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme f de P_1^2 tel que $f * g = \alpha \cdot g_0$, $\alpha : P_1^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Les deux v.r. (P_1^2, g) et $(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r. g_0 et $\alpha \cdot g_0$ sur P_1^2 ; maintenant $SO(3)$ agit sur (P_1^2, g_0) par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de $SO(3)$, de la fonction $\alpha^{1/2}$. Ceci donne une fonction $\bar{\alpha}$; la longueur d'une courbe c pour $\bar{\alpha} \cdot g_0$ est la moyenne de la longueur des courbes $\gamma \circ c$ pour $\alpha \cdot g_0$, γ parcourant $SO(3)$; donc $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \geq \text{carc}(P_1^2, \alpha \cdot g)$. L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur $SO(3)$) dit que $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leq \leq \text{surf}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$. Donc $\text{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \leq \text{quot}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$. Mais, en fait, $\bar{\alpha}$ est une constante, puisque $SO(3)$ agit transitivement sur P_1^2 ; donc $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = \bar{\alpha} \cdot \text{surf}(P_1^2, g_0)$ et $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \cdot \text{carc}(P_1^2, g_0)$. D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

Remarques : (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcannique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord P_1^2 ; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de P_1^2 .

5. Généralisations possibles.

Pour n quelconque, on peut définir $\text{carc}(P_1^n, g)$ exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$(5.1) \quad \text{quot}(P_1^n, g) = \frac{\text{vol}(P_1^n, g)}{(\text{carc}(P_1^n, g))^n}.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si $\text{quot}(P_1^n, g) \geq \text{quot}(P_1^n, g_0)$ pour toute g (pour les variations conformes $\alpha \cdot g_0$, c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de g_0 . En fait on ne sait même pas si la borne inférieure $\inf_g \text{quot}(P_1^n, g)$, pour g parcourant toutes les s.r. sur P_1^n , est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux P_i^n . Remarquons pour ce faire que, dans P_1^n , dire qu'une courbe c n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à P_1^1 , la droite projective pour l'inclusion héréditaire $P_1^1 \subset P_1^n$. On a aussi des inclusions $P_i^1 \subset P_i^n$ pour tout i . Posons donc:

$$(5.2) \quad \text{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^n} \text{vol}(Y, g), \quad \text{quot}(P_i^n, g) = \frac{\text{vol}(P_i^n, g)}{(\text{carc}(P_i^n, g))^n}.$$

La question qui se pose d'abord est le calcul des $\text{quot}(P_i^n, g_0)$; pour $i = 1$, c'est fait. Pour $i = 2, 4, 8$, voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

$$(5.3) \quad \ll I(n; i) \gg: \forall g: \text{quot}(P_i^n, g) \geq \text{quot}(P_i^n, g_0);$$

$$(5.4) \quad \ll IC(n; i) \gg: \ll I(n; i) \gg \text{ et } \ll \text{quot}(P_i^n, g) = \text{quot}(P_i^n, g_0) \text{ entraîne } (P_i^n, g) \text{ et } (P_i^n, g_0) \text{ sont isométriques} \gg;$$

$$(5.5) \quad \ll P(n; i) \gg: \exists k > 0 \text{ telle que } \forall g: \text{quot}(P_i^n, g) \geq k.$$

Voir le tableau, page 85.

6. Le cas kählérien.

Soit (M, g) une variété hermitienne, c'est-à-dire que M possède une structure analytique complexe, dont on notera J la multiplication par $(-1)^{1/2}$ sur le fibré réel TM , et que g commute avec $J: \forall x, y: g(J(x), J(y)) = g(x, y)$. On en déduit sur M une forme alternée de degré deux ω , par

$$(6.1) \quad \forall x, y: \omega(x, y) = g(x, J(y)).$$

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si Y est une sous-variété compacte de dimension deux de M , alors

$$(6.2): \text{vol}(Y, g) \geq \int_Y \omega_Y, \text{ l'égalité ayant lieu si et seulement si } Y \text{ est une sous-variété analytique complexe.}$$

Supposons de plus (M, g) kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$ (on appelle ω la forme de Kähler de (M, g)). Si Y et Z sont homotopes:

$$(6.3) \quad \int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant, (P_2^n, g_0) est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$. D'après (6.2) et (6.3), quel que soit $Y \sim P_2^1$ et parce que $P_2^1 \subset P_2^n$ est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler ω_0 de (P_2^n, g_0) :

$$\text{vol}(Y, g_0) \geq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que $\text{carc}(P_2^n, g_0) = \pi$, puis $\text{quot}(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kähler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2} \delta \bar{\delta} f$; définir g par (6.1) à partir de ω . Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \wedge^n \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\text{vol}(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega_0 = \text{vol}(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\text{vol}(Y, g) \geq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{carc}(P_2^n, g_0)$$

donc $\text{carc}(P_2^n, g) = \text{carc}(P_2^n, g_0)$. D'où $\text{quot}(P_2^n, g) = \text{quot}(P_2^n, g_0)$ pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « $IC(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer $\text{quot}(P_4^n, g_0)$ (resp. $\text{quot}(P_8^n, g_0)$). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^n); on aura $\text{carc}(P_4^n, g_0) = \text{vol}(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où $\text{quot}(P_4^n, g_0)$ (voir tableau). De même: $\text{carc}(P_8^n, g_0) = \text{vol}(P_8^1, g_0) = \text{vol}(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. (d'après (2.10)); d'où $\text{quot}(P_8^n, g_0)$ (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC(n;4)$ » ou « $IC(2;8)$ ».

7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan $\text{carc}(M, g)$ de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$(7.1) \quad \text{quot}(M, g) = \frac{\text{vol}(M, g)}{(\text{carc}(M, g))^n}, \quad n = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute g : $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; en outre $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $(S^1 \times S^1, g)$ est isométrique à un tore équilatéral (voir (2.4.2)).*

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$)

| | $S^n = P_0^n$ | P_1^2 | $P_1^n = P^n(\mathbf{R}) (n \geq 3)$ | P_2^n | P_4^n | P_8^2 |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\text{vol}(P;; g_0)$ | $n = 2p: 2 \cdot \frac{(2\pi)^p}{p}$ $n = 2p + 1: 2 \cdot \frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | 2π | $n = 2p: \frac{(2\pi)^p}{p}$ $n = 2p + 1: \frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | $\frac{\pi^n}{n!}$ | $\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$ | $\frac{\pi^8}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$ |
| $\text{quot}(P;., g_0)$ | | $2 \frac{\pi}{\pi}$ | $n = 2p: \frac{2^p}{p}$ $n = 2p + 1: \frac{\pi}{p!}$ | $1 \frac{1}{n!}$ | $\frac{6^n}{(2n+1)!}$ | $\frac{7}{11}$ |
| « $I(., .)$ » | | vraie | ouverte | ouverte | ouverte | ouverte |
| « $IC(., .)$ » | | vraie | ouverte | fausse | ouverte | ouverte |
| « $P(., .)$ » | | vraie | ouverte | ouverte | ouverte | ouverte |

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \cong \text{quot}(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau G de \mathbf{R}^2 . Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit G_q la surface compacte orientable à q trous (ou surface orientable de genre q , toutes ces surfaces sont difféomorphes à G_q).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). Pour tout q quelle que soit la s.r. sur G_q : $\text{quot}(G_q, g) \cong (t_{2q})^{1/q}$ (où les t_n sont ceux définis par (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les b_q sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q} \text{quot}(G_q, g)$, mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$(7.4) \quad \forall g: \text{quot}((S^1)^n, g) \cong \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot}(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques t_n ne sont pas connus, sauf pour $2 \leq n \leq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement:

[5], corollary, p. 143. Enfin que t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit M une variété C^∞ compacte et α, β, \dots différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de M . Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. g sur M :

$$(7.5) \quad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés Y de M qui appartiennent à la classe α considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété Y ; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g), \beta(g), \dots$, indépendantes de la s.r. g sur M ? Le théorème de Pu est relatif au cas où α est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et β la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \cong \frac{2}{\pi} (\beta(g))^2$ pour toute g . Le théorème de Loewner montre, en

tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\text{vol}(M \times N, g) \cong \alpha(g) \cdot \beta(g)$ pour toute g . Voir aussi [11'].

GÉODÉSIIQUES.

8. Définition.

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

$$(8.1) \quad d(m, n) = \inf_c \text{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M ; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coïncide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \rightarrow M$ (I intervalle de \mathbf{R}) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall t \in I \exists t' > t, t' \in I$, tel que $\text{long}(c|_{[t, t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour (\mathbf{R}^n, g_0) les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S .

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

$$(8.2) \quad \forall m, n \in M \exists c, \text{ courbe d'extrémités } m, n, \text{ telle que } \text{long}(c, g) = d(m, n);$$

$$(8.3) \quad \forall x \in TM \text{ il existe une géodésique unique } c : \mathbf{R} \rightarrow M \text{ telle que } c'(0) = x.$$

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre